

# WYKŁAD Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ 1

M. Kosek

14 lutego 2024

## Spis treści

|          |                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Liczby rzeczywiste i zespolone (szkic)</b>                     | <b>1</b>  |
| 1.1      | Liczby naturalne . . . . .                                        | 1         |
| 1.2      | Liczby całkowite . . . . .                                        | 4         |
| 1.3      | Liczby wymierne . . . . .                                         | 5         |
| 1.4      | Liczby rzeczywiste . . . . .                                      | 6         |
| 1.5      | Przedziały, moduł, oś liczbowa, $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . . | 12        |
| 1.6      | Liczby zespolone . . . . .                                        | 18        |
| <b>2</b> | <b>Funkcje – przypomnienie (szkic)</b>                            | <b>23</b> |
| 2.1      | Funkcje elementarne . . . . .                                     | 23        |
| 2.2      | Pewne funkcje nieelementarne . . . . .                            | 29        |
| 2.3      | Monotoniczność . . . . .                                          | 32        |
| 2.4      | Wypukłość . . . . .                                               | 34        |
| <b>3</b> | <b>Ciągi liczbowe</b>                                             | <b>37</b> |
| 3.1      | Granica ciągu – podstawowe własności . . . . .                    | 37        |
| 3.2      | Granica a działania . . . . .                                     | 41        |
| 3.3      | Granica a porządek . . . . .                                      | 44        |
| 3.4      | Ciągi monotoniczne . . . . .                                      | 47        |
| 3.5      | Podciągi . . . . .                                                | 53        |
| 3.6      | Ciągi Cauchy’ego . . . . .                                        | 59        |

|          |                                                    |            |
|----------|----------------------------------------------------|------------|
| 3.7      | Granice niewłaściwe – suma . . . . .               | 61         |
| 3.8      | Granice niewłaściwe – iloczyn i iloraz . . . . .   | 64         |
| 3.9      | Pierwiastki i potęgi wymierne . . . . .            | 69         |
| 3.10     | Potęgi rzeczywiste . . . . .                       | 74         |
| 3.11     | Granice dolne i górne . . . . .                    | 80         |
| <b>4</b> | <b>Elementy topologii</b>                          | <b>87</b>  |
| 4.1      | Metryka i kule . . . . .                           | 87         |
| 4.2      | Zbiory otwarte i domknięte . . . . .               | 89         |
| 4.3      | Wnętrze i domknięcie . . . . .                     | 95         |
| 4.4      | Zwartość . . . . .                                 | 96         |
| 4.5      | Spójność . . . . .                                 | 102        |
| <b>5</b> | <b>Granica funkcji</b>                             | <b>104</b> |
| 5.1      | Definicja Heinego granicy funkcji . . . . .        | 104        |
| 5.2      | Definicja Cauchy’ego granicy funkcji . . . . .     | 108        |
| 5.3      | Granice jednostronne . . . . .                     | 110        |
| 5.4      | Ciągłość w punkcie . . . . .                       | 112        |
| 5.5      | Operacje na funkcjach ciągłych w punkcie . . . . . | 115        |
| 5.6      | Ciągłość na zbiorze . . . . .                      | 116        |
| 5.7      | Twierdzenia Darboux . . . . .                      | 121        |
| 5.8      | Niewłaściwe granice funkcji . . . . .              | 124        |
| <b>6</b> | <b>Rachunek różniczkowy</b>                        | <b>131</b> |
| 6.1      | Różniczkowalność . . . . .                         | 131        |
| 6.2      | Twierdzenia o wartości średniej . . . . .          | 138        |
| 6.3      | Własności funkcji różniczkowalnych . . . . .       | 141        |
| 6.4      | Regularność . . . . .                              | 145        |
| 6.5      | Wielomian Taylora . . . . .                        | 150        |
| 6.6      | Wzór Taylora . . . . .                             | 154        |
| <b>7</b> | <b>O pewnych rodzajach funkcji</b>                 | <b>159</b> |
| 7.1      | Funkcje monotoniczne . . . . .                     | 159        |
| 7.2      | Funkcje jednostajnie ciągłe . . . . .              | 166        |

|          |                                                               |            |
|----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 7.3      | Funkcje lipschitzowskie (i hölderowskie) . . . . .            | 170        |
| 7.4      | Funkcje ograniczone . . . . .                                 | 171        |
| 7.5      | Funkcje wypukłe . . . . .                                     | 174        |
| 7.6      | Reguła de L'Hôpitala i badanie przebiegu zmienności . . . . . | 178        |
| <b>8</b> | <b>Ciągi funkcyjne</b>                                        | <b>183</b> |
| 8.1      | Zbieżność punktowa i jednostajna . . . . .                    | 183        |
| 8.2      | Ciągłość i różniczkowalność funkcji granicznych . . . . .     | 186        |

# 1 Liczby rzeczywiste i zespolone (szkic)

Pokażemy szkic konstrukcji ciała liczb rzeczywistych i ciała liczb zespolonych przechodząc kolejne etapy i rozszerzając kolejne pojęcia (działania, porządek...).

## 1.1 Liczby naturalne

Zbiór **liczb naturalnych** zostanie zdefiniowany formalnie na wykładzie Elementy logiki i teorii mnogości. Przyjmujemy oznaczenie  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ . Będziemy też często używać symbolu  $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Pojęcie **działania** zostanie zdefiniowane na wykładzie Algebra liniowa z geometrią.

W zbiorze liczb naturalnych określone są działania **dodawania**

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a, b) \longmapsto a + b \in \mathbb{N}$$

i **mnożenia**

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (a, b) \longmapsto ab = a \cdot b \in \mathbb{N}.$$

Działania te są

- **łączne**, to znaczy

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{oraz} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N} : (ab)c = a(bc);$$

- **przemienne**, to znaczy

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b = b + a \quad \text{oraz} \quad \forall a, b \in \mathbb{N} : ab = ba;$$

- każde z nich ma **element neutralny** (dodawanie 0, mnożenie 1), to znaczy

$$\forall a \in \mathbb{N} : a + 0 = a = 0 + a \quad \text{oraz} \quad \forall a \in \mathbb{N} : a \cdot 1 = a = 1 \cdot a.$$

Zauważmy jeszcze jedną własność, mianowicie mnożenie jest **rozdzielne** względem dodawania, to znaczy

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a(b + c) = ab + ac \quad \text{oraz} \quad (a + b)c = ac + bc.$$

Pojęcie **relacji** i w szczególności **porządku** zostanie zdefiniowane na wykładzie Elementy logiki i teorii mnogości.

Liczby naturalne możemy porównywać. Mówimy, że nierówność  $\leq$  jest porządkiem w  $\mathbb{N}$ , bo jest

- **zwrotna**, to znaczy

$$\forall a \in \mathbb{N} : \quad a \leq a;$$

- **antysymetryczna**, to znaczy

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : \quad (a \leq b \quad \text{i} \quad b \leq a) \implies a = b;$$

- **przechodnia**, to znaczy

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \quad (a \leq b \quad \text{i} \quad b \leq c) \implies a \leq c.$$

Ponadto jest to porządek **liniowy**, to znaczy

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : \quad a \leq b \quad \text{lub} \quad b \leq a.$$

Dalej ten porządek jest **zgodny z działaniami**, to znaczy

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \quad a \leq b \implies (a + c \leq b + c \quad \text{oraz} \quad ac \leq bc).$$

Niech teraz  $A \subset \mathbb{N}$  oraz  $a \in \mathbb{N}$ . Mówimy, że  $a$  jest **majorantą**  $A$ , jeśli  $\forall x \in A : x \leq a$ ; natomiast  $a$  jest **minorantą**  $A$ , jeśli  $\forall x \in A : x \geq a$ . Zbiór  $A$  jest **ograniczony od dołu**, jeśli istnieje jakaś jego minoranta, a **ograniczony od góry**, jeśli istnieje jakaś jego majoranta. Zbiór  $A$  jest **ograniczony**, jeśli jest ograniczony i od dołu i od góry.

Na przykład cały zbiór  $\mathbb{N}$  jest ograniczony od dołu (jego minorantą jest 0), a nie jest ograniczony od góry.

Wobec przechodniości porządku, jeśli  $a$  jest majorantą zbioru  $A$  i  $b \geq a$ , to również  $b$  jest majorantą zbioru  $A$ . Symetrycznie dla minorant.

**Kresem górnym** zbioru  $A$  w  $\mathbb{N}$  nazywamy taki element **sup**  $A \in \mathbb{N}$ , dla którego zachodzą oba poniższe warunki:

- $\text{sup } A$  jest majorantą zbioru  $A$ ,
- jeśli  $b$  jest majorantą zbioru  $A$ , to  $\text{sup } A \leq b$ .

**Kresem dolnym** zbioru  $A$  w  $\mathbb{N}$  nazywamy taki element **inf**  $A \in \mathbb{N}$ , dla którego zachodzą oba poniższe warunki:

- $\text{inf } A$  jest minorantą zbioru  $A$ ,
- jeśli  $b$  jest minorantą zbioru  $A$ , to  $\text{inf } A \geq b$ .

**Maksimum** zbioru  $A$  nazywamy taki element **max**  $A \in A$ , że  $\forall a \in A : a \leq \text{max } A$ . **Minimum** zbioru  $A$  nazywamy taki element **min**  $A \in A$ , że  $\forall a \in A : a \geq \text{min } A$ .

Jeśli zbiór  $A$  ma maksimum, to jest ograniczony od góry i jego  $\sup A = \max A$ . Analogicznie jeśli zbiór  $A$  ma minimum, to jest ograniczony od dołu i  $\inf A = \min A$ . Przeciwnie implikacje tu (to znaczy w  $\mathbb{N}$ ) także są prawdziwe, ale ogólnie tak nie będzie.

Na przykład minimum i kresem dolnym  $\mathbb{N}$  jest 0. Natomiast  $\mathbb{N}$  nie ma kresu górnego i nie ma też maksimum.

**Twierdzenie 1.1.1 (Zasada minimum)** *Jeśli  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ , to istnieje  $\min A$ .*

**Dowód:** wykład z Elementów logiki i teorii mnogości. ■

Na przykład minimum zbioru liczb (naturalnych) nieparzystych jest 1.

**Twierdzenie 1.1.2 (Zasada indukcji matematycznej)** *Jeśli  $A \subset \mathbb{N}$  jest taki, że*

*(i)  $0 \in A$  oraz (ii)  $n \in A \implies n + 1 \in A$ ,  
to  $A = \mathbb{N}$ .*

**Dowód:** Załóżmy dla dowodu nie wprost, że  $B := \mathbb{N} \setminus A$  jest niepusty. Na mocy Zasady minimum (Twierdzenie 1.1.1) istnieje  $k_0 = \min B$ . Ponieważ  $0 \in A$  z (i), więc  $k_0 \neq 0$ . Z definicji minimum wynika, że  $k_0 - 1 \notin B$ , czyli  $k_0 - 1 \in A$ . Wobec tego z (ii) wynika, że  $k_0 = (k_0 - 1) + 1 \in A$ , a to jest sprzeczność. ■

**Twierdzenie 1.1.3 (Zasada indukcji zupełnej)** *Jeśli  $A \subset \mathbb{N}^*$  jest taki, że*

*(i)  $1 \in A$  oraz (ii)  $\{1, \dots, n\} \subset A \implies n + 1 \in A$ ,  
to  $A = \mathbb{N}^*$ .*

**Dowód:** Załóżmy dla dowodu nie wprost, że  $B := \mathbb{N}^* \setminus A$  jest niepusty. Na mocy Zasady minimum (Twierdzenie 1.1.1) istnieje  $k_0 = \min B$ . Ponieważ  $1 \in A$  z (i), więc  $k_0 \neq 1$ . Z definicji minimum wynika, że jeśli  $j \in \{1, \dots, k_0 - 1\}$ , to  $j \notin B$ , czyli  $j \in A$ . Wobec tego z (ii) wynika, że  $k_0 = (k_0 - 1) + 1 \in A$ , a to jest sprzeczność. ■

I jedną i drugą zasadę można stosować do zbiorów postaci  $\{k, k + 1, k + 2, \dots\} = \mathbb{N} + k$ . Wtedy w pierwszym punkcie zamiast 0 (odpowiednio 1) pojawia się  $k$ .

**Lemat 1.1.4**

$$(1.1) \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq 4 \implies n! > 2^n.$$

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Ze zbiorem liczb naturalnych związane jest pojęcie **przeliczalności**.

Mówimy mianowicie, że zbiór nieskończony  $A$  jest **przeliczalny**, jeśli istnieje odwzorowanie różnowartościowe i „na” (czyli **bijekcja**)  $\mathbb{N} \rightarrow A$  (to znaczy o dziedzinie  $\mathbb{N}$  i przeciwdziedzinie  $A$ ). Na przykład zbiór liczb parzystych naturalnych jest przeliczalny, bo odwzorowanie  $\mathbb{N} \ni k \mapsto 2k \in 2\mathbb{N}$  jest bijekcją.

Zbiór jest natomiast **co najwyżej przeliczalny**, jeśli jest albo skończony albo przeliczalny.

## 1.2 Liczby całkowite

W zbiorze liczb naturalnych tylko 0 ma element przeciwny (to znaczy **symetryczny** względem dodawania). Rozważamy zbiór **liczb całkowitych**

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

To znaczy dla każdego niezerowego elementu  $a \in \mathbb{N}$  dorzucamy element **przeciwny** do niego względem dodawania, czyli liczbę  $-a$  (bo  $-a + a = 0$ ). Zbiór  $\mathbb{Z}$  jest przeliczalny.

Łatwo sprawdzić, że zarówno dodawanie jak i mnożenie są działaniami w tym zbiorze (to znaczy suma lub iloczyn dwóch liczb całkowitych jest liczbą całkowitą). Zachowują się także własności łączności, istnienia elementów neutralnych, przemienności i rozdzielności na tym większym zbiorze.

Z działaniem dodawania  $\mathbb{Z}$  tworzy **grupę**.

Podobnie przenosi się porządek  $\leq$  (to znaczy mamy tu też zwrotność, antysymetrię, przechodniość) i jego własności: liniowość i zgodność z dodawaniem. Przy czym dla zobaczenia liniowości lepiej zapisać ten zbiór w postaci

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Natomiast zgodność porządku z mnożeniem wymaga dodatkowego założenia, brzmi tak

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : (a \leq b \text{ i } c \geq 0) \implies ac \leq bc.$$

Wobec tego, że mamy porządek, możemy na zbiór  $\mathbb{Z}$  przenieść też pojęcia minorant, majorant, kresów, ograniczoności, minimów i maksimów.

Zbiór  $\mathbb{Z}$  nie jest ograniczony ani od dołu, ani od góry. Także zbiór liczb (całkowitych) nieparzystych nie jest ograniczony ani od dołu, ani od góry. W  $\mathbb{Z}$  mamy więcej minorant zbioru  $\mathbb{N}$ , wszystkie liczby niedodatnie są minorantami.

Można pokazać, że jeśli zbiór  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{Z}$  jest ograniczony od dołu (odp. **od góry**), to  $\inf A = \min A$  (odp.  **$\sup A = \max A$** ). Jeśli  $A \subset \mathbb{Z}$  jest ograniczony, to jest skończony.

### 1.3 Liczby wymierne

Niech  $a \in \mathbb{Z}$ . Elementem symetrycznym względem mnożenia, czyli **odwrotnym**, do  $a$  jest taka liczba  $a'$ , że  $aa' = 1$ .

Oczywiście 0 nie może mieć elementu symetrycznego względem mnożenia, ale w  $\mathbb{Z}$  tylko 1 i  $-1$  mają takie elementy. Naturalne jest pytanie o elementy odwrotne dla pozostałych niezerowych liczb całkowitych. Trochę analogicznie do rozszerzenia liczb naturalnych na liczby całkowite można by rozważyć zbiór

$$A := \left\{ 0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{3}, \dots \right\},$$

czyli dorzucić element odwrotny do każdej niezerowej liczby całkowitej. Taki zbiór jednak nie jest dobry, bo zarówno dodawanie, jak i mnożenie, przestają być tu działaniami. Mianowicie na przykład

$$2 + \frac{1}{3} \notin A, \quad 2 \cdot \frac{1}{3} \notin A.$$

Wobec tego rozważamy zbiór **liczb wymiernych**

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

W tym zbiorze zarówno dodawanie jak i mnożenie są działaniami, są łączne, przemienne, mnożenie jest rozdzielne względem dodawania, oba działania mają elementy neutralne (odpowiednio 0 i 1), każdy element ma element przeciwny (czyli symetryczny względem dodawania) oraz każdy element niezerowy ma element odwrotny.

Mówimy, że  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  jest **ciałem**.

Informacyjnie:  $\mathbb{Q}$  jest zbiorem przeliczalnym, to znaczy istnieje bijekcja pomiędzy  $\mathbb{N}$  i  $\mathbb{Q}$ . Dowód na wykładzie z Elementów logiki i teorii mnogości.

Porządek  $\leq$  przenosi się na  $\mathbb{Q}$  razem ze swoimi własnościami: liniowością i zgodnością z działaniami. Zatem  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  jest **ciałem uporządkowanym**.  $\mathbb{Q}$  ma dodatkowo własność **gęstości** względem porządku, której nie miały ani  $\mathbb{N}$ , ani  $\mathbb{Z}$ , mianowicie

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} : \quad a < b \implies \exists c \in \mathbb{Q} : a < c < b,$$

można wziąć na przykład  $c = (a + b)/2$ .

Skoro mamy porządek, możemy znowu mówić o ograniczoności zbiorów i o wszystkich tych elementach z tym związanych. Zbiór  $\mathbb{Q}$  nie jest ograniczony ani od dołu ani od góry.

Niech  $A \subset \mathbb{Q}$ . Jeśli istnieje  $\min A$ , to  $\inf A = \min A$ . Jeśli istnieje  $\max A$ , to  $\sup A = \max A$ .

Jednak jeśli istnieje infimum zbioru  $A$ , to nie musi istnieć jego minimum.

**Przykład 1.3.1** *Zbiór wszystkich liczb wymiennych dodatnich ma infimum równe 0, ale nie ma minimum. Zbiór wszystkich liczb wymiennych ujemnych ma supremum równe 0, ale nie ma maksimum.*

**Dowód:** Załóżmy dla dowodu nie wprost, że istnieje  $b = \min B$ , gdzie  $B$  jest zbiorem wszystkich liczb wymiennych dodatnich. Wtedy  $b \in B$ , zatem  $b > 0$ . Ale wtedy  $\frac{b}{2}$  jest też liczbą dodatnią wymierną, zatem należy do  $B$ , jest natomiast mniejsza od  $b$ , co jest sprzecznością z definicją minimum.

0 jest infimum zbioru  $B$ , bo 0 jest minorantą i żadna minoranta nie może być dodatnia (rozumowanie analogiczne, jak wyżej, gdyby jakaś była dodatnia, jej połowa byłaby w zbiorze  $B$ , co przeczyłoby faktowi, że jest to minoranta).

Symetrycznie pokazujemy dla zbioru  $A$  wszystkich liczb wymiennych ujemnych (ćwiczenie). ■

W przeciwieństwie do sytuacji z  $\mathbb{N}$  i  $\mathbb{Z}$  istnieją podzbiory zbioru  $\mathbb{Q}$ , które są ograniczone i nieskończone, na przykład  $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ .

Niestety  $\mathbb{Q}$  nie ma tak zwanego [aksjomatu Dedekinda](#)<sup>1</sup>, mianowicie nie każdy niepusty zbiór ograniczony od dołu ma kres dolny (jak również nie każdy niepusty zbiór ograniczony od góry ma kres górny).

**Przykład 1.3.2** *Zbiór  $A := \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$  jest ograniczony, ale nie ma ani kresu górnego, ani kresu dolnego w  $\mathbb{Q}$ .*

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Ten przykład wiąże się z faktem, że nie istnieje liczba wymierna, która podniesiona do kwadratu da liczbę 2. W szczególności nie istnieje liczba wymierna, która jest długością przekątnej kwadratu o boku długości 1. Stąd potrzeba rozważania szerszej klasy, którą zajmujemy się w następnym podrozdziale.

## 1.4 Liczby rzeczywiste

[Przekrojem Dedekinda](#) nazywamy parę  $[A, B]$ , gdzie  $A, B$  to rozłączne niepuste podzbiory  $\mathbb{Q}$ , takie, że  $A \cup B = \mathbb{Q}$  oraz  $\forall a \in A \forall b \in B : a < b$ .

Jeśli na przykład  $A$  to zbiór liczb wymiennych niedodatnich, a  $B$  to zbiór liczb wymiennych dodatnich, to  $[A, B]$  jest przekrojem Dedekinda.

**Własność 1.4.1 (Własności przekrojów Dedekinda)** *Niech  $[A, B]$  będzie przekrojem Dedekinda. Wtedy:*

---

<sup>1</sup>Richard Dedekind (1831-1916) – matematyk niemiecki

1. Dowolny element zbioru  $A$  jest minorantą zbioru  $B$ , a dowolny element zbioru  $B$  jest majorantą zbioru  $A$ . W szczególności  $A$  jest ograniczony od góry, a  $B$  ograniczony od dołu.
2. Jeśli  $a \in A, b \in B, c \in \mathbb{Q}$ , to  $(c \geq b \implies c \in B)$  oraz  $(c \leq a \implies c \in A)$ .
3. Zbiory  $A, B$  są nieskończone.
4. Jeśli  $[A_1, B_1]$  jest też przekrojem Dedekinda, to  $A_1 \subsetneq A \iff B \subsetneq B_1$ .
5. Jeśli  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $s_0, \dots, s_n \in \mathbb{Q}$  są takie, że  $s_0 < s_1 < \dots < s_n$ , oraz  $s_0 \in A$  i  $s_n \in B$ , to  $\exists k \in \{0, \dots, n-1\} : s_k \in A, s_{k+1} \in B$ .
6. Jeśli istnieje  $\max A$ , to nie istnieje  $\min B$ .
7. Jeśli istnieje  $\min B$ , to  $\min B = \sup A$  oraz  $\min B = \max(A \cup \{\min B\})$ .
8. Jeśli istnieje  $\min B$  oraz  $A' := A \cup \{\min B\}$ ,  $B' := B \setminus \{\min B\}$ , to  $[A', B']$  jest przekrojem Dedekinda oraz nie istnieje  $\min B'$ .
9. Jeśli  $[A_1, B_1]$  jest też przekrojem Dedekinda oraz  $B \setminus B_1$  ma tylko jeden element, to jest to  $\min B$ .

**Dowód:** ćwiczenie. ■

**Własność 1.4.2** Jeśli  $[A, B]$  jest przekrojem Dedekinda, to istnieje taka liczba  $k \in \mathbb{N}^*$ , że  $k \in B$ .

**Dowód:** Zbiór  $B$  jest niepusty, zatem istnieje  $b \in B$ . Jeśli  $b < 0$ , to położmy  $c := -b$ , jeśli  $b \geq 0$ , położmy  $c := b + 1$ . Wtedy  $c > b$ , zatem  $c \in B$  na mocy Własności 1.4.1 przekrojów Dedekinda. Jest to wymierna liczba dodatnia, zatem istnieją takie  $k, q \in \mathbb{N}^*$ , że  $c = k/q$ . Stąd ze zgodności porządku z mnożeniem  $k = qc \geq c$ , a stąd znowu  $k \in B$ . ■

Przekrój Dedekinda  $[A, B]$  nazywamy **unormowanym**, jeśli nie istnieje  $\min B$ . Na przykład, jeśli  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$  i  $B = \mathbb{Q} \setminus A$ , to  $[A, B]$  nie jest unormowany. Ale jeśli  $A' = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$ ,  $B' = \mathbb{Q} \setminus A'$ , to  $[A', B']$  jest unormowany.

Definiujemy zbiór **liczb rzeczywistych**

$$\mathbb{R} := \{[A, B] : [A, B] \text{ jest unormowanym przekrojem Dedekinda}\}.$$

Jeśli istnieje  $\max A$  (zwróćmy uwagę, że  $A$  jest podzbiorem  $\mathbb{Q}$ , zatem to maksimum jest liczbą wymierną), to z przekrojem  $[A, B]$  utożsamiamy tę liczbę wymierną  $\max A$ .

Zatem uprawniony jest zapis  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , bo każdej liczbie wymiernej  $q$  przyporządkujemy unormowany przekrój Dedekinda  $[A_q, B_q]$ , gdzie  $A_q = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq q\}$ . Zatem od tej pory, jeśli  $q \in \mathbb{Q}$ , to możemy napisać  $q = [A_q, B_q]$ , przy czym  $q = \max A_q$ .

Na przykład jeśli  $A$  to zbiór liczb wymiernych niedodatnich, to  $[A, B]$  reprezentuje 0. Jeśli natomiast nie istnieje  $\max A$ , to  $[A, B]$  reprezentuje liczbę niewymierną. Na przykład  $\sqrt{2}$  jest reprezentowany przez  $[A, B]$ , gdzie

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0\} \cup \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}, \quad B = \mathbb{Q} \setminus A.$$

Definiujemy porządek w  $\mathbb{R}$ :

$$[A, B] < [A', B'] \iff A \subsetneq A' \quad (\iff B' \subsetneq B)$$

oraz

$$[A, B] \leq [A', B'] \iff ([A, B] < [A', B'] \text{ lub } A = A').$$

Zbiór liczb rzeczywistych jest liniowo uporządkowany (to znaczy, że  $\leq$  spełnia znowu warunki zwrotności, antysymetrii i przechodniości oraz że zachowana jest własność liniowości).

**Własność 1.4.3** Niech  $q \in \mathbb{Q}$  oraz  $\alpha = [A, B] \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $q > \alpha \iff q \in B$ .

**Dowód:** Niech  $[A_q, B_q]$  to unormowany przekrój Dedekinda dla  $q$ . Ponieważ  $q = \max A_q \in A_q$ , więc  $\forall b \in B_q : b > q$ .

( $\Leftarrow$ ) W konsekwencji jeśli  $q \in B$ , to  $B_q \subsetneq B$ , czyli  $q = [A_q, B_q] > [A, B] = \alpha$ .

( $\Rightarrow$ ) Przez kontrapozycję: jeśli  $q \notin B$ , wtedy  $q \in A$ , więc  $A_q \subset A$ , zatem  $q = [A_q, B_q] \leq [A, B] = \alpha$ . ■

**Twierdzenie 1.4.4 (Zasada Archimedesesa)** <sup>2</sup>

*Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje liczba naturalna, która jest od niej większa.*

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $\alpha = [A, B]$ . Z Własności 1.4.2 istnieje  $k \in \mathbb{N}^* \cap B$ . Z Własności 1.4.3 mamy  $k > \alpha$ . ■

**Lemat 1.4.5** Jeśli  $\alpha \in \mathbb{R}$ , to dla każdej liczby wymiernej  $r > 0$  istnieją takie liczby wymierne  $p, q$ , że  $q - p = r$  oraz  $p < \alpha < q$ .

**Dowód:** Niech  $\alpha = [A, B]$  oraz  $s := r/2$ . Ustalmy dowolne  $w' \in B$  oraz  $w \in A$ . Wtedy  $w' - w > 0$  z definicji przekroju Dedekinda. Wobec Zasady Archimedesesa (Twierdzenie

---

<sup>2</sup>Archimedes z Syrakuz (ok. 287-212 p.n.e.) – matematyk grecki

1.4.4) istnieje liczba naturalna  $n > (w' - w)/s$ , a stąd  $w' < w + ns$ . Zauważmy, że  $n \in \mathbb{N}^*$ . Rozważmy liczby wymierne

$$w, w + s, \dots, w + ns.$$

Pierwsza z nich należy do  $A$ , ostatnia do  $B$  (bo jest większa od  $w' \in B$ ). Z Własności 1.4.1 przekrojów Dedekinda istnieje takie  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , że  $w + ks \in A$  oraz  $q := w + (k+1)s \in B$ . Bierzemy  $p := w + (k-1)s$ . Mamy  $p < \alpha < q$  oraz  $q - p = r$ . ■

**Własność 1.4.6 (Gęstość  $\mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$ )** *Jeśli  $a, b \in \mathbb{R}$  i  $a < b$ , to istnieje takie  $q \in \mathbb{Q}$ , że  $a < q < b$ .*

**Dowód:** Niech  $a = [A_a, B_a], b = [A_b, B_b]$ . Ponieważ  $a < b$ , więc  $B_b \subsetneq B_a$  z definicji porządku. Wobec tego, że są to przekroje unormowane, to  $B_a \setminus B_b$  nie jest jednoelementowy (bo na mocy Własności 1.4.1 przekroju Dedekinda tym jednym elementem musiałoby być  $\min B_a$ , które nie istnieje). Wobec tego istnieją takie  $q, q' \in B_a \setminus B_b$ , że  $q < q'$ . Korzystamy z Własności 1.4.3. Ponieważ  $q' \notin B_b$ , więc  $q' \leq b$ , a z przechodniości nierówności  $q < b$ . Z drugiej strony  $q \in B_a$ , więc  $q > a$ . ■

Rozszerzamy działania na  $\mathbb{R}$ . Niech  $x = [A, B], y = [A', B'] \in \mathbb{R}$ :

- $x + y := [A_1, B_1]$ , gdzie  $B_1 = \{b + b' : b \in B, b' \in B'\}$ .
- $-x = [A_2, B_2]$ , gdzie

$$B_2 := \begin{cases} \{-a : a \in A\}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ \{-a : a \in A \setminus \{\max A\}\}, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- Jeśli  $x, y \geq 0$ , to  $xy := [A_3, B_3]$ , gdzie  $B_3 := \{bb' : b \in B, b' \in B'\}$ .
- Jeśli  $x, y < 0$ , to  $xy := (-x)(-y)$ .
- Jeśli  $x < 0, y \geq 0$ , to  $xy = -[(-x)y]$ . Jeśli  $x \geq 0, y < 0$ , to  $xy = -[x(-y)]$ .
- Jeśli  $x > 0$ , to  $\frac{1}{x} := [A_4, B_4]$ , gdzie

$$B_4 := \begin{cases} \{1/a : a > 0, a \in A\}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}; \\ \{1/a : a > 0, a \in A \setminus \{\max A\}\}, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- Jeśli  $x < 0$ , to  $\frac{1}{x} := -\frac{1}{-x}$ .

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  jest ciałem uporządkowanym, to znaczy zachodzi:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (a, b) \mapsto a + b \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (a, b) \mapsto ab = a \cdot b \in \mathbb{R}.$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{oraz} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} : (ab)c = a(bc);$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b = b + a \quad \text{oraz} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} : ab = ba;$$

$$\exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a + 0 = a = 0 + a \quad \text{oraz} \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a = 1 \cdot a;$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0 = (-a) + a;$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a.$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b + c) = ab + ac \quad \text{oraz} \quad (a + b)c = ac + bc.$$

$$\forall a \in \mathbb{R} : a \leq a;$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leq b \text{ i } b \leq a) \implies a = b;$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \text{ i } b \leq c) \implies a \leq c;$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \implies a + c \leq b + c,$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \text{ i } c \geq 0) \implies ac \leq bc.$$

Co więcej, porządek jest liniowy, a  $\mathbb{R}$  jest zbiorem gęstym, to znaczy

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \text{ lub } b \leq a;$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \implies \exists c \in \mathbb{R} : a < c < b.$$

**Lemat 1.4.7** <sup>3</sup>

$$(1.2) \quad \forall \delta > -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} : (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta \quad (\text{Nierówność Bernoullego}).$$

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Rozszerzamy definicje ograniczeń, maksimów, minimów i kresów na podzbiory zbioru  $\mathbb{R}$ .

---

<sup>3</sup>Jakob Bernoulli (1654-1705) – matematyk szwajcarski

**Definicja 1.4.8** Niech  $C \subset \mathbb{R}$  oraz  $c \in \mathbb{R}$ .

Mówimy, że  $c$  jest *majorantą*  $C$ , jeśli  $\forall x \in C : x \leq c$ ; natomiast  $c$  jest *minorantą*  $C$ , jeśli  $\forall x \in C : x \geq c$ .

Zbiór  $C$  jest *ograniczony od dołu*, jeśli istnieje jakaś jego minoranta, a *ograniczony od góry*, jeśli istnieje jakaś jego majoranta. Zbiór  $C$  jest *ograniczony*, jeśli jest ograniczony i od dołu i od góry.

*Kresem górnym* zbioru  $C$  w  $\mathbb{R}$  nazywamy taki element  $\sup C \in \mathbb{R}$ , dla którego zachodzą następujące dwa warunki:

- $\sup C$  jest majorantą zbioru  $C$ ,
- jeśli  $b$  jest majorantą zbioru  $C$ , to  $\sup C \leq b$ .

*Kresem dolnym* zbioru  $C$  w  $\mathbb{R}$  nazywamy taki element  $\inf C \in \mathbb{R}$ , dla którego zachodzą następujące dwa warunki:

- $\inf C$  jest minorantą zbioru  $C$ ,
- jeśli  $b$  jest minorantą zbioru  $C$ , to  $\inf C \geq b$ .

*Maksimum* zbioru  $C$  nazywamy taki element  $\max C \in C$ , że  $\forall x \in C : x \leq \max C$ . *Minimum* zbioru  $C$  nazywamy taki element  $\min C \in C$ , że  $\forall x \in C : x \geq \min C$ .

Jeśli istnieje  $\min C$ , to  $\inf C = \min C$ . Jeśli istnieje  $\max C$ , to  $\sup C = \max C$ . Istnieją zbiory, które mają kres górny (odp. dolny), ale nie mają maksimum (odp. minimum) (por. Przykład 1.3.1).

**Twierdzenie 1.4.9 (Aksjomat Dedekinda zbioru  $\mathbb{R}$ )** Zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$  spełnia aksjomat Dedekinda, to znaczy każdy jego podzbiór niepusty i ograniczony od góry posiada kres górny, a każdy jego niepusty podzbiór ograniczony od dołu posiada kres dolny.

**Dowód:** Pokażemy przypadek zbioru ograniczonego od góry (drugi przypadek należy zrobić symetrycznie, ćwiczenie).

Ustalmy dowolny niepusty zbiór  $C \subset \mathbb{R}$  ograniczony od góry. Niech  $B'$  będzie zbiorem wszystkich jego majorant wymiernych. Jest on niepusty, bo  $C$  jest ograniczony od góry (jeśli  $r = [A_r, B_r] \in \mathbb{R}$  jest jego ograniczeniem górnym, to  $B_r \in B'$  z Własności 1.4.3). Niech  $A' := \mathbb{Q} \setminus B'$ .

Zbiór  $C$  z założenia jest niepusty. Zatem istnieje  $c = [A_c, B_c] \in C$ . Ale wtedy  $A_c \setminus \{c\} \subset A'$ , stąd  $A'$  nie jest pusty.

Ustalmy dowolne  $a \in A'$ ,  $b \in B'$ . Z definicji  $A'$  mamy  $a \neq b$ . Gdyby  $a > b$ , to  $a$  byłoby majorantą zbioru  $C$  z przechodniości nierówności, bo  $b$  jest majorantą tego

zbioru, a to oznaczałoby, że  $a \in B'$ , co jest sprzeczne z rozłącznością zbiorów  $A'$  i  $B'$ . Zatem  $a < b$ .

Pokazaliśmy, że  $[A', B']$  jest przekrojem Dedekinda. Jeśli nie istnieje  $\min B'$ , to przyjmujemy  $[A, B] := [A', B']$ . Jeśli istnieje  $\min B'$ , to bierzemy  $[A, B]$ , gdzie  $B := B' \setminus \{\min B'\}$ . Wtedy  $[A, B]$  jest unormowanym przekrojem Dedekinda, czyli  $\alpha := [A, B] \in \mathbb{R}$ .

Ustalmy dowolny  $x \in C$ . Gdyby  $x > \alpha$ , to z Własności 1.4.6 istniałaby taka liczba wymierna  $q$ , że  $x > q > \alpha$ . Ale skoro  $q > \alpha$ , to  $q \in B$  na mocy Własności 1.4.3, więc tu mamy sprzeczność, bo  $B$  jest zbiorem majorant zbioru  $C$ , a skoro  $q < x$ , to  $q$  nie jest majorantą zbioru  $C$ . Zatem  $x \leq \alpha$ .

Pokazaliśmy, że  $\forall x \in C : x \leq \alpha$ , to znaczy  $\alpha$  jest majorantą zbioru  $C$ .

Z drugiej strony niech  $\beta = [A_\beta, B_\beta]$  będzie jakąś majorantą zbioru  $C$ . Każdy element zbioru  $B_\beta$  jest majorantą wymierną zbioru  $C$ , a to oznacza  $B_\beta \subset B'$ . Zauważmy, że stąd wynika, że  $B_\beta \subset B$ . Bo gdyby tak nie było, to musiałby istnieć  $\min B'$  oraz należeć do  $B_\beta$ . Zwróćmy uwagę, że wtedy  $\min B' = \min B_\beta$  wobec zawierania  $B_\beta \subset B'$ , ale to jest sprzeczność, bo  $B_\beta$  nie może mieć minimum, skoro przekrój  $[A_\beta, B_\beta]$  jest unormowany. Pokazaliśmy zatem, że  $B_\beta \subset B$ , a to oznacza (z definicji porządku), że  $\beta \geq \alpha$ .

Pokazaliśmy, że  $\alpha = \sup C$ . ■

Informacyjnie:  $\mathbb{R}$  jest nieprzeliczalny, to znaczy nie istnieje bijekcja pomiędzy  $\mathbb{N}$  i  $\mathbb{R}$ . Dowód na wykładzie z Elementów logiki i teorii mnogości.

## 1.5 Przedziały, moduł, oś liczbowa, $\overline{\mathbb{R}}$

Niech  $a, b \in \mathbb{R}$  będą takie, że  $a < b$ . Wtedy możemy rozważać przedziały:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\};$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\};$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

**Lemat 1.5.1 (Ułamki Fareya)** <sup>4</sup> Niech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Zakładamy, że

$$\forall j \in \{1, \dots, k\} : \quad b_j > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{a_j}{b_j} \in (\alpha, \beta).$$

Wtedy

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} \in (\alpha, \beta).$$

---

<sup>4</sup>John Farey (1766-1826) – geolog angielski

**Dowód:** I. Dla  $k = 1$  teza oczywista.

II. Niech teraz  $b, d > 0$  oraz  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in (\alpha, \beta)$ . Wtedy  $\frac{b}{b+d} > 0$  i  $\frac{d}{b+d} > 0$ . Mnożymy nierówności

$$\alpha < \frac{a}{b} < \beta \quad \text{oraz} \quad \alpha < \frac{c}{d} < \beta$$

stronami pierwszą przez  $\frac{b}{b+d}$ , a drugą przez  $\frac{d}{b+d}$  i dodajemy stronami otrzymując

$$\alpha = \left( \frac{b}{b+d} + \frac{d}{b+d} \right) \alpha < \frac{b}{b+d} \cdot \frac{a}{b} + \frac{d}{b+d} \cdot \frac{c}{d} < \left( \frac{b}{b+d} + \frac{d}{b+d} \right) \beta = \beta.$$

Zauważmy, że w środku mamy  $\frac{a+c}{b+d}$ .

III. Załóżmy teraz, że teza lematu jest prawdziwa dla pewnego ustalonego  $k \in \mathbb{N}^*$ . Niech

$$\forall j \in \{1, \dots, k, k+1\} : \quad b_j > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{a_j}{b_j} \in (\alpha, \beta).$$

Stosujemy najpierw założenie indukcyjne do  $a_j$  i  $b_j$  dla  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Mamy zatem

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} \in (\alpha, \beta).$$

Stosujemy teraz krok II dla  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_k, b = b_1 + b_2 + \dots + b_k, c = a_{k+1}, d = b_{k+1}$  i otrzymujemy

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}}{b_1 + b_2 + \dots + b_k + b_{k+1}} = \frac{a+c}{b+d} \in (\alpha, \beta).$$

Wobec kroków I i III lemat wynika z Zasady indukcji matematycznej (Twierdzenie 1.1.2). ■

Zauważmy, że jeśli  $a \in \mathbb{R}$ , to singleton  $\{a\}$  można zapisać jako zbiór  $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq a\}$ . W niektórych przypadkach można ten zbiór zapisać w postaci  $[a, a]$  i podciągnąć pod definicję przedziału. Tak zrobimy poniżej.

**Lemat 1.5.2** *Niech  $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ . Wtedy*

$$z \in [x, y] \iff \exists t \in [0, 1] : z = (1-t)x + ty.$$

**Dowód:** ( $\Leftarrow$ ) Zauważmy, że ze zgodności porządku z mnożeniem mamy

$$\forall t \in [0, 1] : \quad tx \leq ty \quad \text{oraz} \quad (1-t)x \leq (1-t)y.$$

Jeśli teraz (stosując zgodność porządku z dodawaniem) dodamy stronami do pierwszej nierówności  $(1-t)x$ , a do drugiej  $ty$ , to otrzymamy  $\forall t \in [0, 1] : x \leq (1-t)x + ty \leq y$ .

( $\Rightarrow$ ) Jeśli  $x = y$ , to  $z = x$  i  $t = 0$  jest dobrze dobrane.

Założmy teraz, że  $x < y$ . Niech  $t := (z - x)/(y - x)$ . Wtedy  $t \in [0, 1]$  oraz

$$(1 - t)x + ty = \left(1 - \frac{z - x}{y - x}\right)x + \frac{z - x}{y - x}y = \frac{yx - zx + zy - xy}{y - x} = z.$$

■

**Własność 1.5.3** Niech  $A \subset \mathbb{R}$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

- $A$  jest ograniczony (od dołu i od góry);
- $\exists a, b \in \mathbb{R} : a < b$  oraz  $A \subset [a, b]$ ;
- $\exists a, b \in \mathbb{R} : a < b$  oraz  $A \subset (a, b)$ .

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Definiujemy **moduł** liczby rzeczywistej  $a \in \mathbb{R}$

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{gdy } a \geq 0 \\ -a, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}.$$

**Własność 1.5.4 (Własności modułu)**  $\forall a, b \in \mathbb{R} :$

1.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (*Nierówność trójkąta*);
2.  $|a + b| = |a| + |b| \iff (a, b \geq 0 \text{ lub } a, b \leq 0)$ ;
3.  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ ;
4.  $|ab| = |a| \cdot |b|$ ;
5.  $b \neq 0 \implies \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ;
6.  $|a| = \sqrt{a^2}$ .

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Niech  $a, b \in \mathbb{R}$ . Często pisze się  $\max(a, b) = \max\{a, b\}$  oraz  $\min(a, b) = \min\{a, b\}$ . Zauważmy, że jeśli  $a < b$  i  $A = (a, b)$ , to  $\max A$  i  $\min A$  nie istnieją, zatem nie ma tu kolizji oznaczeń.

**Własność 1.5.5** Jeśli  $a, b \in \mathbb{R}$ , to

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Definiujemy **część dodatnią i część ujemną** liczby  $a \in \mathbb{R}$ :

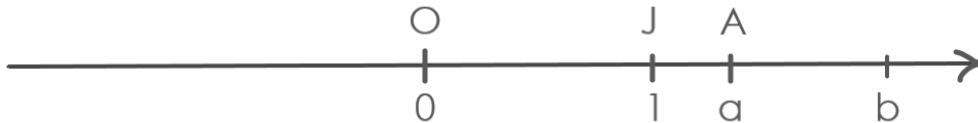
$$a^+ := \begin{cases} a, & \text{gdy } a \geq 0 \\ 0, & \text{gdy } a < 0 \end{cases}; \quad a^- := \begin{cases} -a, & \text{gdy } a \leq 0 \\ 0, & \text{gdy } a > 0 \end{cases}.$$

**Własność 1.5.6 (Własności części dodatniej i ujemnej)**  $\forall a \in \mathbb{R}$ :

1.  $a^+ = \max\{a, 0\} = \frac{|a| + a}{2}$ ,  $a^- = \max\{-a, 0\} = \frac{|a| - a}{2}$ ;
2.  $a^+ \geq 0$ ,  $a^- \geq 0$ ;
3.  $a = a^+ - a^-$ ,  $|a| = a^+ + a^-$ .

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Liczby rzeczywiste przyporządkowujemy punktom prostej (co jest możliwe dzięki aksjomatowi Dedekinda). Na prostej wybieramy punkt początkowy  $O$  i na prawo od niego różny od niego punkt jednostkowy  $J$ . Liczba 0 zostaje przyporządkowana punktowi  $O$ , a liczba 1 punktowi  $J$ .



Niech teraz  $a \in \mathbb{R}$ . Przyporządkowujemy liczbie  $a$  punkt  $A$  na prawo od punktu  $O$  jeśli  $a > 0$ , a na lewo, jeśli  $a < 0$ , taki, że długość odcinka  $OA$  jest równa  $|a|$  razy długość odcinka  $OJ$ . Oznacza to istnienie **osi liczbowej**.

Jeśli mamy dwie liczby  $a, b \in \mathbb{R}$ , to  $|a - b|$  jest ich odległością na prostej. Zwróćmy uwagę, że odwzorowanie

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (a, b) \mapsto |a - b| \in \mathbb{R}$$

ma następujące własności

- jest nieujemne, bo

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a - b| \geq 0;$$

- jest **jednoznaczne**, bo

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a - b| = 0 \iff a = b;$$

- jest **symetryczne**, bo

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a - b| = |b - a|;$$

- spełnia **nierówność trójkąta**, bo

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : |a - b| + |b - c| \geq |a - c|.$$

To oznacza, że to odwzorowanie to **metryka** (odległość) w  $\mathbb{R}$ .

Rozszerzamy teraz zbiór liczb rzeczywistych dodając dwa różne elementy:  $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ( $-\infty, +\infty \notin \mathbb{R}$ ,  $-\infty \neq +\infty$ ). Rozszerzone działania:

| +                  | $-\infty$ | $a \in \mathbb{R}$ | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|--------------------|-----------|
| $-\infty$          | $-\infty$ | $-\infty$          | ?         |
| $b \in \mathbb{R}$ | $-\infty$ | $a + b$            | $+\infty$ |
| $+\infty$          | ?         | $+\infty$          | $+\infty$ |

oraz

| $\cdot$   | $-\infty$ | $a < 0$   | $0$ | $a > 0$   | $+\infty$ |
|-----------|-----------|-----------|-----|-----------|-----------|
| $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | ?   | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $b < 0$   | $+\infty$ | $ab$      | $0$ | $ab$      | $-\infty$ |
| $0$       | ?         | $0$       | $0$ | $0$       | ?         |
| $b > 0$   | $-\infty$ | $ab$      | $0$ | $ab$      | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | ?   | $+\infty$ | $+\infty$ |

Rozszerzamy też nierówności, jeśli  $a \in \mathbb{R}$ , to  $-\infty < a < +\infty$ . Przedziałami niewłaściwymi są

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}; \\ [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}; \\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}; \\ (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}; \\ (-\infty, +\infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Informacyjnie: Odwzorowanie  $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$  dane wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{gdy } x = +\infty \end{cases}$$

jest dobrze określone, silnie rosnące (to znaczy  $x < y \implies \varphi(x) < \varphi(y)$ ) oraz jest bijekcją.

Rozważmy teraz niepusty zbiór  $A \subset \mathbb{R}$ . Jeśli zbiór  $A$  jest ograniczony od góry, to na mocy Aksjomatu Dedekinda (Twierdzenie 1.4.9) istnieje jego kres górny  $\sup A \in \mathbb{R}$ . Otóż jeśli ten zbiór nie jest ograniczony od góry piszemy  $\sup A = +\infty$ . To jest wygodne oznaczenie. Dzięki niemu można napisać: zbiór  $A$  jest nieograniczony od góry wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sup A = +\infty$ . Przyjmujemy analogiczne oznaczenie w przypadku zbioru nieograniczonego od dołu i możemy napisać:  $A$  jest nieograniczony od dołu wtedy i tylko wtedy, gdy  $\inf A = -\infty$ . Zauważmy, że wobec tego dla każdego zbioru  $A \subset \mathbb{R}$  możemy zdefiniować  $\inf A$  i  $\sup A$  jako elementy  $\overline{\mathbb{R}}$ . Mianowicie dla zbioru niepustego  $A \subset \mathbb{R}$ , jeśli  $A$  jest ograniczony od dołu lub od góry korzystamy z Aksjomatu Dedekinda, czyli Twierdzenia 1.4.9, w przeciwnym przypadku odpowiedni „kres” jest nieskończonością. Przy czym podkreślimy, że mówimy, że istnieje kres górny (**dolny**) zbioru tylko wtedy, gdy ten zbiór jest ograniczony od góry (**od dołu**)! Bo istniejący kres musi być liczbą rzeczywistą.

Wróćmy jeszcze do przedziałów. Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem. Wtedy istnieją  $a, b \in \mathbb{R}$  takie, że  $a < b$  oraz  $A = \{x \in \mathbb{R} : a R_a x R_b b\}$ , gdzie  $R_a, R_b \in \{<, \leq\}$ , przy czym oczywiście w przypadku  $a = -\infty$  lub  $b = +\infty$  możliwe jest tylko  $<$ .

**Własność 1.5.7 (Charakteryzacja przedziałów)** *Jeśli  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ , to  $A$  jest przedziałem wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(1.3) \quad \forall x, y \in A \quad \forall t \in [0, 1] : \quad (1-t)x + ty \in A.$$

*Równoważnie:  $A$  jest przedziałem wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall a, b \in A : a < b \implies [a, b] \subset A$ .*

**Dowód:** ( $\implies$ ) Załóżmy najpierw, że  $A$  jest przedziałem, to znaczy istnieją  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ , takie, że  $A = \{x \in \mathbb{R} : a R_a x R_b b\}$ .

Ustalmy teraz dowolne  $x, y \in A$  oraz  $t \in [0, 1]$ . Bez straty ogólności można założyć, że  $x \leq y$ . Z Lematu 1.5.2 wynika, że  $x \leq (1-t)x + ty \leq y$  i z przechodniości porządku  $a R_a (1-t)x + ty R_b b$ , czyli  $(1-t)x + ty \in A$ .

( $\impliedby$ ) Niech teraz  $A$  będzie niepusty i spełniający warunek (1.3). Niech  $a := \inf A$  oraz  $b := \sup A$ . Wtedy  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Wystarczy wykazać, że  $A = \{x \in \mathbb{R} : a R_a x R_b b\}$ , gdzie  $R_a$  to słaba nierówność, jeśli  $a = \min A \in A$ , natomiast silna, jeśli nie istnieje  $\min A$ . Symetrycznie dla  $R_b$ . Czyli  $a \in A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a = \min A$ ; symetrycznie  $b \in A \iff b = \max A$ .

Niech teraz  $x \in \mathbb{R}$ . Jeśli  $a \in \mathbb{R}$  i  $x < a$ , to z Definicji 1.4.8 kresu dolnego  $x \notin A$ . Symetrycznie, jeśli  $b \in \mathbb{R}$  i  $x > b$ , to  $x \notin A$ . Pokazaliśmy, że  $A \subset \{x \in \mathbb{R} : a R_a x R_b b\}$ .

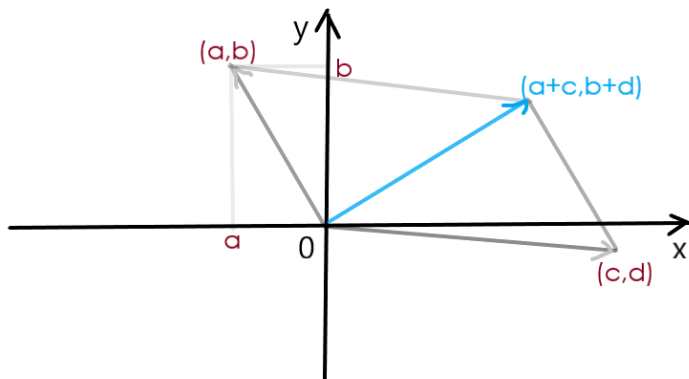
Aby pokazać przeciwną inkluzję wystarczy rozważyć  $x \in (a, b)$ . Ponieważ  $a = \inf A$ , więc  $x$  nie jest minorantą zbioru  $A$ , zatem  $\exists c \in A : c < x$ . Symetrycznie

$\exists d \in A : x < d$ . Zauważmy, że  $d > c$  z przechodniości nierówności. Z Lematu 1.5.2 wynika, że  $\exists t \in [0, 1] : x = (1 - t)c + td$ , a stąd i z założenia (1.3)

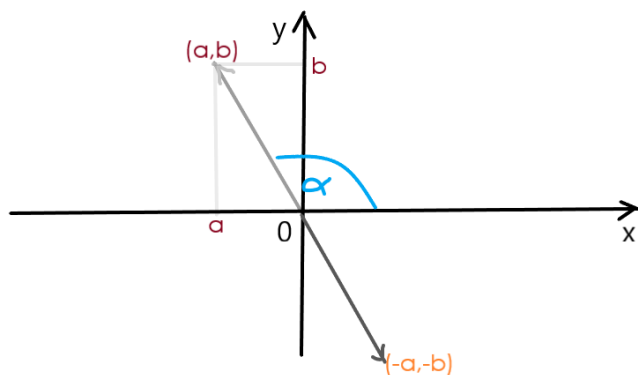
$$x = (1 - t)c + td \in A.$$

Dodatkowa teza wynika z wcześniejszej i Lematu 1.5.2. ■

## 1.6 Liczby zespolone



Rozważmy teraz płaszczyznę z kartezjańskim układem współrzędnych. Każdy punkt można utożsamić z parą liczb rzeczywistych  $(a, b)$ , a także z wektorem o początku  $(0, 0)$  i końcu  $(a, b)$ . Takie punkty (wektory) można naturalnie dodawać  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ . Zwróćmy uwagę, że oś odciętych możemy utożsamiać z osią liczbową liczb rzeczywistych, zatem liczbę rzeczywistą  $c$  z punktem (wektorem)  $(c, 0)$ . Dodawanie punktów na płaszczyźnie jest naturalnym rozszerzeniem dodawania liczb rzeczywistych. Elementem neutralnym jest  $0 = (0, 0)$ , elementem przeciwnym do  $(a, b)$  punkt  $(-a, -b)$ .



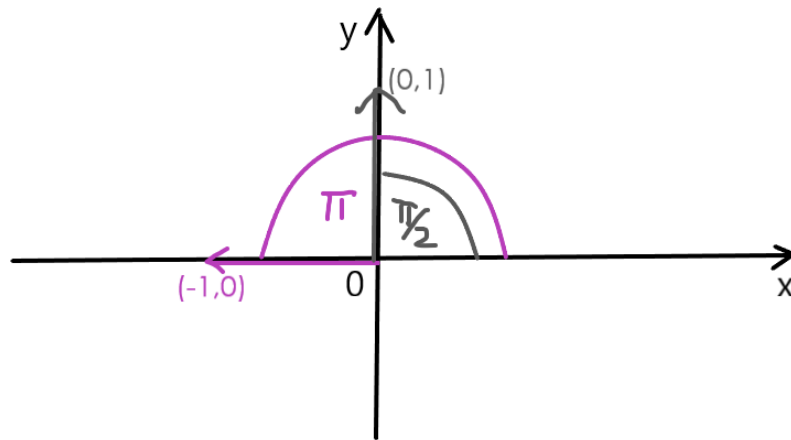
Jeśli mówimy o wektorze  $(a, b)$  to możemy policzyć jego długość (inaczej odległość punktu  $(a, b)$  od środka  $(0, 0)$ ), otrzymując  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Wtedy

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha, \quad \text{natomiast} \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha,$$

gdzie  $\alpha$  jest miarą kąta nachylenia wektora  $(a, b)$  do półosi dodatniej odciętych  $Ox$  (w przypadku punktu  $(0, 0)$  można tu wziąć dowolny kąt).

Zwróćmy uwagę, że punkty rzeczywiste dodatnie  $(a, 0)$  mają kąty nachylenia o mierze  $0(+2k\pi)$ , a rzeczywiste ujemne mają kąty  $\pi(+2k\pi)$ . Wiemy, że jeśli pomnożymy dwie liczby dodatnie to otrzymamy liczbę dodatnią, więc kąt pozostanie  $0(+2k\pi)$ . Natomiast, jeśli pomnożymy jedną liczbę ujemną przez jedną dodatnią, to otrzymamy liczbę ujemną, więc kąt  $\pi(+2k\pi)$ . Wreszcie jeśli pomnożymy dwie liczby ujemne, to dostaniemy liczbę dodatnią, więc kąt  $0(+2k\pi)$ . Co się dzieje z tymi kątami? Naturalnym wytłumaczeniem jest ich dodawanie. Dodanie dwóch 0 daje 0, dodanie  $\pi$  do 0 daje  $\pi$ , wreszcie dodanie  $\pi$  do  $\pi$  daje  $2\pi$ , czyli tak naprawdę znowu kąt  $0(+2m\pi)$ .

Ponadto odległości punktów od 0 mnożą się przez siebie.



Spróbujmy w podobny sposób wymnożyć punkt  $(0, 1)$  przez siebie. Długość wektora to 1, a kąt nachylenia to  $\frac{\pi}{2}(+2k\pi)$ . Zatem jeśli przemnożymy, to długość pozostanie 1, ale kąt powinien być  $\pi(+2m\pi)$ , czyli dostajemy punkt  $(-1, 0)$  odpowiadający liczbie  $-1$ .

Oznaczmy  $(0, 1) =: i$ . Otrzymaliśmy  $i^2 = -1$ . Zauważmy teraz, że dowolny punkt  $(a, b)$  możemy zapisać za pomocą  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$ , mianowicie

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi.$$

Jak również za pomocą odpowiedniego kąta

$$(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha + i \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Założmy teraz, że mamy dwa wektory jednostkowe. Nasze mnożenie ma być rozszerzeniem mnożenia liczb rzeczywistych, więc ma być rozdzielne względem dodawania,

zatem możemy zapisać (wykorzystując fakt  $i^2 = -1$ )

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta = \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) = \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Jak widać, jest to zgodne z naszą intuicją dodawania kątów.

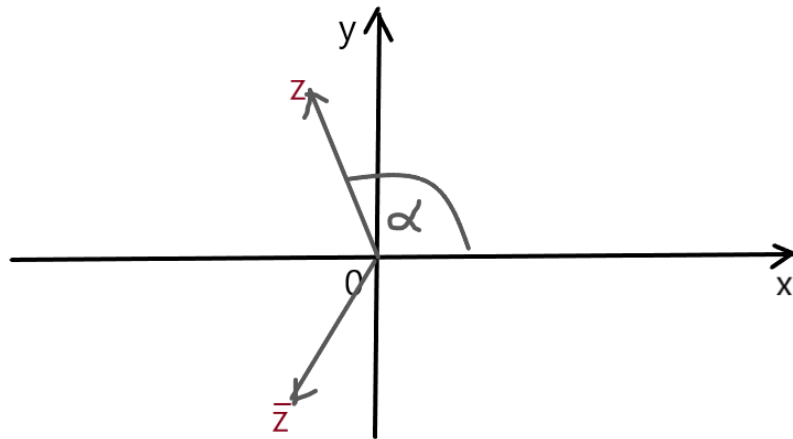
$\mathbb{C}$  oznacza zbiór wszystkich liczb **zespoleonych**, czyli liczb postaci  $z = a + bi$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$  (zatem każda liczba zespolona jest parą liczb rzeczywistych – jest to przedstawienie wzajemnie jednoznaczne). Z działaniami

$$\begin{aligned} z + w &= (a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i, \\ zw &= (a + bi)(c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$  jest ciałem (ćwiczenie: wyznaczyć element odwrotny do  $z = a + bi \neq 0$ .) Zwróćmy uwagę, że można powiedzieć, że  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , utożsamiając  $\mathbb{R} = \{a + i0 : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ .

**Modułem** liczby zespolonej  $z = a + bi$  (gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ ) nazywamy  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Jest to rozszerzenie definicji modułu z liczb rzeczywistych na liczby zespolone.  $a = \text{Re}z$  nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby  $z$ , natomiast  $b = \text{Im}z$  – **częścią urojoną**. Zauważmy, że części rzeczywista i urojona są liczbami rzeczywistymi, trochę analogicznie do przypadku części dodatniej i ujemnej liczby rzeczywistej, które obie były nieujemne.

Można powiedzieć, że jeśli  $z \in \mathbb{C}$ , to  $z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}z = 0$ .



Kąt nachylenia do półosi odciętych nieujemnych nazywamy **argumentem**. Definiujemy **sprzężenie** liczby zespolonej  $\bar{z} := a - bi$ .

**Własność 1.6.1 (Własności modułu i sprzężenia)**  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ :

1.  $|z + w| \leq |z| + |w|$  (*Nierówność trójkąta*);
2.  $|z + w| = |z| + |w| \iff z \text{ oraz } w \text{ mają ten sam argument};$
3.  $\left| |z| - |w| \right| \leq |z - w|;$
4.  $|\operatorname{Re} z| \leq |z| \text{ oraz } |\operatorname{Im} z| \leq |z|;$
5.  $|zw| = |z| \cdot |w|;$
6.  $w \neq 0 \implies \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|};$
7.  $|z|^2 = z \cdot \bar{z};$
8.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w};$
9.  $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w};$
10.  $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z;$
11.  $\bar{\bar{z}} = z.$

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Funkcja  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z, w) \mapsto |z - w| \in \mathbb{R}$  jest metryką, dokładnie mówiąc jest to odległość euklidesowa na płaszczyźnie.

$\mathbb{C}$  jest o tyle lepsze od  $\mathbb{R}$ , że na przykład równanie  $z^2 = -1$  ma tu rozwiązanie. Natomiast coś też tracimy. Nie jest to ciało uporządkowane. Nie istnieje taki porządek, który byłby zgodny z działaniami. W szczególności, jeśli piszemy nierówność np.  $r > 0$ , to wiadomo, że  $r$  jest liczbą rzeczywistą (dodatnią).

Niech  $w \in \mathbb{C}, r > 0$ . Zbiór  $K(w, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$  nazywamy *kołem otwartym* o środku  $w$  i promieniu  $r$ , natomiast zbiór  $\bar{K}(w, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$  – *kołem domkniętym*. Z braku porządku liniowego nie możemy na  $\mathbb{C}$  przenieść w sposób naturalny pojęć majorant, minorant, kresów zbiorów. Natomiast możemy zdefiniować ograniczoność zbioru: mówimy, że  $A \subset \mathbb{C}$  jest *ograniczony*, jeśli istnieją takie  $w \in \mathbb{C}$  oraz  $r > 0$ , że  $A \subset K(w, r)$ .

Mówimy, że  $A \subset \mathbb{C}$  jest *wypukły* jeśli

$$\forall z, w \in A \forall t \in [0, 1] : (1 - t)z + tw \in A.$$

Zauważmy, że Charakteryzacja przedziałów (Własność 1.5.7) mówi, że przedziały są zbiorami wypukłymi, a co więcej są to jedyne niepuste zbiory wypukłe w  $\mathbb{R}$ . Łatwo pokazać, że koła otwarte i domknięte są zbiorami wypukłymi (ćwiczenie).

Na koniec pewna własność sum liczb zespolonych. Informacyjnie o nowym symbolu: na przykład  $\sum_{j=1}^4 a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ .

**Twierdzenie 1.6.2 (Nierówność Schwarza)** <sup>5</sup>

Niech  $n \in \mathbb{N}^*$  oraz  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$ . Wtedy

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \overline{b_j} \right|^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \right).$$

Ponadto równość zachodzi tylko, jeśli  $(a_1, \dots, a_n)$  i  $(b_1, \dots, b_n)$  są liniowo zależne.

**Dowód:** Niech  $A := \sum_{j=1}^n |a_j|^2$ ,  $B := \sum_{j=1}^n |b_j|^2$ ,  $C := \sum_{j=1}^n a_j \overline{b_j}$ . Jeśli  $B = 0$ , to nierówność jest oczywista. Załóżmy zatem, że  $B > 0$  i policzmy

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n |Ba_j - Cb_j|^2 = \sum_{j=1}^n (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a_j} - \overline{C}\overline{b_j}) = \\ &= B^2 \sum_{j=1}^n |a_j|^2 - B\overline{C} \sum_{j=1}^n a_j \overline{b_j} - BC \sum_{j=1}^n \overline{a_j} b_j + C\overline{C} \sum_{j=1}^n |b_j|^2 = \\ &= B^2 A - B\overline{C}C - BC\overline{C} + C\overline{C}B = B^2 A - B|C|^2 = B(BA - |C|^2). \end{aligned}$$

Wobec tego  $BA \geq |C|^2$  oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall j \in \{1, \dots, n\} : Ba_j - Cb_j = 0$ . ■

Przydatny będzie następujący lemat.

**Lemat 1.6.3** <sup>6</sup>

$$(1.4) \quad \forall a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (\text{Dwumian Newtona}).$$

$$(1.5) \quad \forall a, b \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad a \neq b \implies \sum_{j=0}^n a^j b^{n-j} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Oznaczenie:  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  – jedno z ciał podstawowych.

<sup>5</sup>Hermann Schwarz, 1843-1921, matematyk niemiecki

<sup>6</sup>Izaak Newton, 1643-1727, matematyk angielski

## 2 Funkcje – przypomnienie (szkic)

### 2.1 Funkcje elementarne

**Wielomianem** nazywamy funkcję postaci

$$w : \mathbb{K} \ni x \mapsto w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}.$$

Jeśli  $a_n \neq 0$ , to  $\deg w = n$ . Jeśli  $w \equiv 0$ , to  $\deg w := -\infty$ .

Jeśli  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oraz  $\deg w$  jest nieparzysty, to  $w$  ma przynajmniej jeden pierwiastek. Jeśli  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  i  $\deg w \geq 1$ , to  $w$  ma pierwiastek.

Jeśli  $w$  jest wielomianem kwadratowym, to można go przedstawić w postaci:

- **ogólnej**  $w(x) = ax^2 + bx + c$ ;
- **iloczynowej**  $w(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  (przy czym ta postać jest zawsze możliwa nad  $\mathbb{C}$ , nie zawsze nad  $\mathbb{R}$ );
- **kanonicznej**  $w(x) = a(x - p)^2 + q$ .

Każdy wielomian można **rozłożyć na czynniki**: nad  $\mathbb{R}$  liniowe i kwadratowe nierozkładalne, nad  $\mathbb{C}$  liniowe. Na przykład

$$\begin{aligned} x^4 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) \\ &= (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i) \end{aligned}$$

– tu pierwszy rozkład jest nad  $\mathbb{R}$ , drugi nad  $\mathbb{C}$ . Dla dziedziny rzeczywistej taki rozkład jest ważny m.in. ze względu na wyznaczanie znaku wielomianu.

Funkcją **wymierną** nazywamy iloraz dwóch wielomianów. Niech  $w_1, w_2$  będą wielomianami. Wtedy dziedziną funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{w_1(x)}{w_2(x)}$$

jest  $\{x \in \mathbb{K} : w_2(x) \neq 0\}$ . Funkcję wymierną będącą ilorazem dwóch wielomianów stopnia pierwszego (nazywanych też funkcjami **liniowymi**) liniowo niezależnych (to znaczy takich, że jeden nie jest równy stała razy drugi), nazywamy **homografią**. Postać kanoniczna homografii to

$$\mathbb{K} \setminus \{c\} \ni x \mapsto a + \frac{b}{x - c} \in \mathbb{K}.$$

W przypadku  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  rozkład mianownika funkcji wymiernej na czynniki liniowe i kwadratowe nierozkładalne będzie przydatny przy rozkładzie na tak zwane ułamki

proste, używane w całkowaniu funkcji wymiernych. **Ułamkami prostymi pierwszego rodzaju** nazywamy funkcje wymierne postaci  $\frac{A}{(x-a)^n}$ , gdzie  $A, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ . **Ułamkami prostymi drugiego rodzaju** nazywamy funkcje wymierne postaci  $\frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}$ , gdzie  $B, C, b, c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$  oraz wielomian  $x \mapsto x^2+bx+c$  nie ma pierwiastków rzeczywistych. Na przykład

$$\frac{x^3+x^2-x+7}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \frac{x-3}{x^2+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}.$$

Następne funkcje w tym rozdziale rozważamy (na razie) tylko dla liczb rzeczywistych.

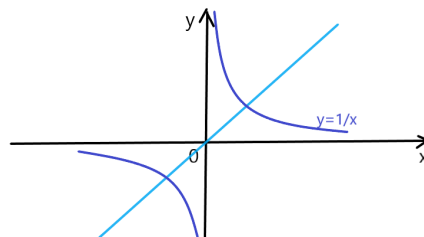
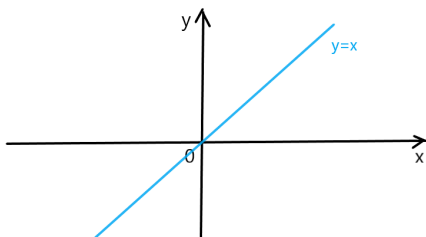
Wróćmy na chwilę do pewnych wielomianów i funkcji wymiernych. Funkcja

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$$

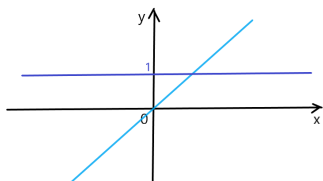
jest bijekcją i jest sama do siebie odwrotna. Podobnie funkcja

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

jest bijekcją i jest sama do siebie odwrotna.



Funkcje potęgowe postaci  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , są użyte w definicji wielomianów. Po pierwsze  $\forall x \in \mathbb{R} : x^0 = 1$ , zatem dla  $n = 0$  otrzymujemy tu funkcję stałą o zbiorze wartości  $\{1\}$ .

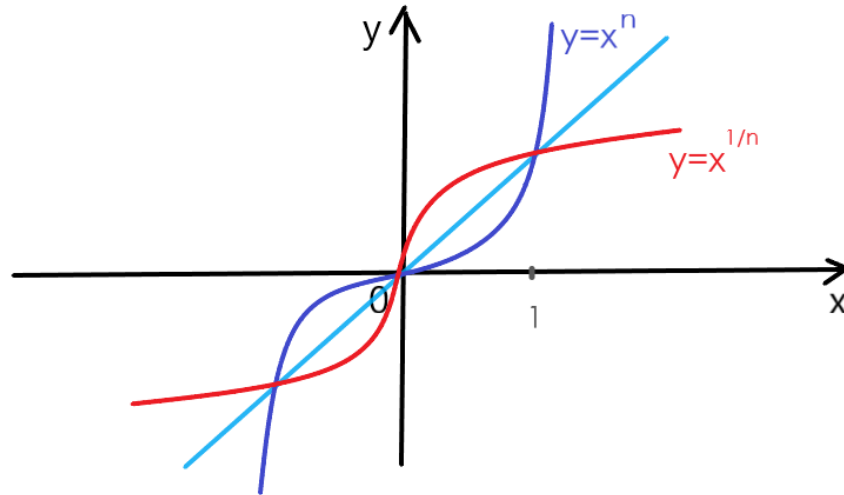


Rozważymy teraz dwa przypadki. Niech najpierw  $n \in \mathbb{N}$  będzie liczbą nieparzystą. Wtedy funkcja

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$$

jest silnie rosnąca, zatem w szczególności jest injekcją. Jest to bijekcja, zatem istnieje do niej funkcja odwrotna

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}.$$



Niech teraz  $n \in \mathbb{N}^*$  będzie liczbą parzystą. Wtedy  $\forall x \in \mathbb{R} : x^n \geq 0$  oraz funkcja  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in [0, +\infty)$  jest parzysta, to znaczy

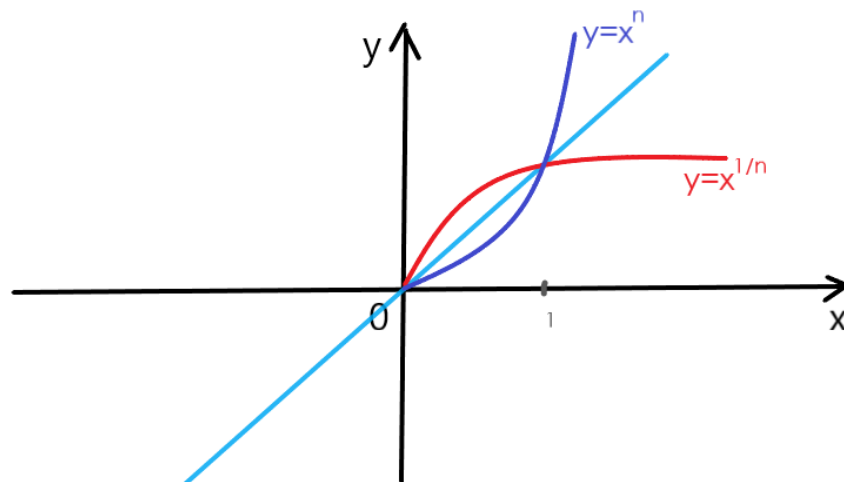
$$\forall a \in \mathbb{R} : f(a) = f(-a),$$

w szczególności nie jest iniektywna. Rozważmy teraz jej zacieśnienie

$$f|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \ni x \mapsto x^n \in [0, +\infty).$$

To jest bijekcja (jest ona silnie rosnąca), zatem istnieje funkcja odwrotna

$$(f|_{[0, +\infty)})^{-1} : [0, +\infty) \ni x \mapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty).$$

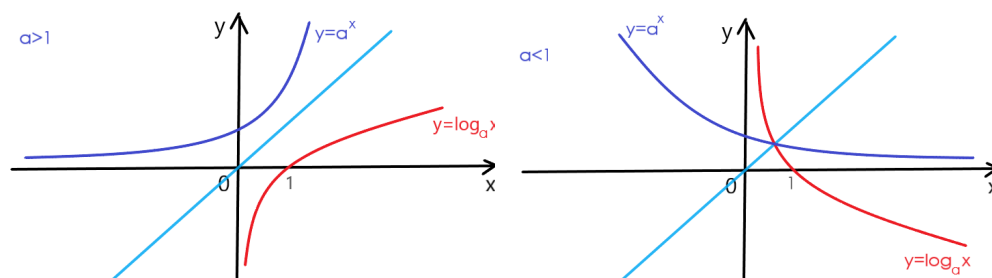


Ogólniej funkcję **potęgową** nazywamy  $x \mapsto x^\alpha$  dla ustalonego  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dziedzina takiej funkcji zależy od  $\alpha$ . Dla liczb naturalnych, jak również dla dodatnich liczb wymiernych o nieparzystych mianownikach (np.  $1/3$ ,  $2/5$ ) jest nią cały zbiór  $\mathbb{R}$ . Dla

dodatnich liczb wymiernych o parzystych mianownikach (np.  $1/2$ ,  $3/4$ ), jak również dodatnich liczb niewymiernych to przedział  $[0, +\infty)$ . Dla pewnych liczb ujemnych (np. liczb całkowitych ujemnych, liczb wymiernych ujemnych o mianownikach nieparzystych):  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; dla innych  $(0, +\infty)$ .

Funkcjami **niewymiernymi** nazywamy pewne złożenia funkcji wymiernych i pierwiastków (to znaczy funkcji potęgowych o wykładnikach będących odwrotnościami liczb naturalnych niezerowych). Na przykład  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ .

Funkcją **wykładniczą** nazywamy funkcję postaci  $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ , gdzie  $a > 0$ . Jeśli  $a \neq 1$ , to jest to funkcja iniektywna i jej zbiorem wartości jest  $(0, +\infty)$ .



Jeśli  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , to funkcję **logarytmiczną** nazywamy

$$\log_a : (0, +\infty) \ni x \mapsto \log_a x \in \mathbb{R},$$

czyli funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej  $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, +\infty)$ . Przypomnijmy, że  $\log_a x = y \iff x = a^y$ ,  $a^{-x} = 1/a^x$ ,  $a^{x+y} = a^x a^y$ ,  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ ,  $(a^x)^y = a^{xy}$ ,  $\log_a x^y = y \log_a x$  przy odpowiednich założeniach. Użytecznym wzorem będzie

$$t > 0, a \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \implies t = a^{\log_a t}.$$

**Liczbę Eulera**<sup>7</sup> oznaczaną literą **e** zdefiniujemy później. Jest to liczba niewymierna dodatnia, w przybliżeniu 2,718. Logarytm przy jej podstawie nazywamy **naturalnym** i oznaczamy **ln** :=  $\log_e$ .

Funkcjami **trygonometrycznymi** nazywamy funkcje sinus, cosinus, tangens i cotangens (a także teraz już nieużywane secans, cosecans). Wprost z definicji wynikają wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych. Są to funkcje okresowe. W szczególności żadna z funkcji trygonometrycznych nie jest iniektywna. Okresem podstawowym funkcji sinus i cosinus jest  $2\pi$ , a funkcji tg i ctg jest  $\pi$ . Funkcja cosinus jest parzysta, a funkcje sinus, tangens i cotangens są nieparzyste. Sinus i cosinus są określone na całym  $\mathbb{R}$ . Funkcje sinus i cosinus są ograniczone (to znaczy ich zbiory wartości są ograniczone), co więcej ich zbiorem wartości jest przedział  $[-1, 1]$

$$\sin : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sin x \in [-1, 1], \quad \cos : \mathbb{R} \ni x \mapsto \cos x \in [-1, 1].$$

<sup>7</sup>Leonhard Euler, 1707-1783, matematyk szwajcarski

Ponieważ  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , więc dziedziną tangensa jest  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Analogicznie ponieważ  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , więc dziedziną cotangensa jest  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ . Te funkcje nie są ograniczone, ich zbiorami wartości jest  $\mathbb{R}$ .

**Własność 2.1.1**  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Ze wzorów z powyższej własności można wywnioskować wzory na sumę lub różnicę sinusów/cosinusów, co będzie dalej przydatne. Można także z drugiego wzoru wywnioskować jedynkę trygonometryczną.

**Lemat 2.1.2**

$$(2.1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{j=1}^n \sin(jx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Podstawowe wartości funkcji sinus i cosinus

|     | 0                    | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$      |
|-----|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| sin | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{4}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{1}}{2}$ | $\frac{\sqrt{0}}{2}$ |

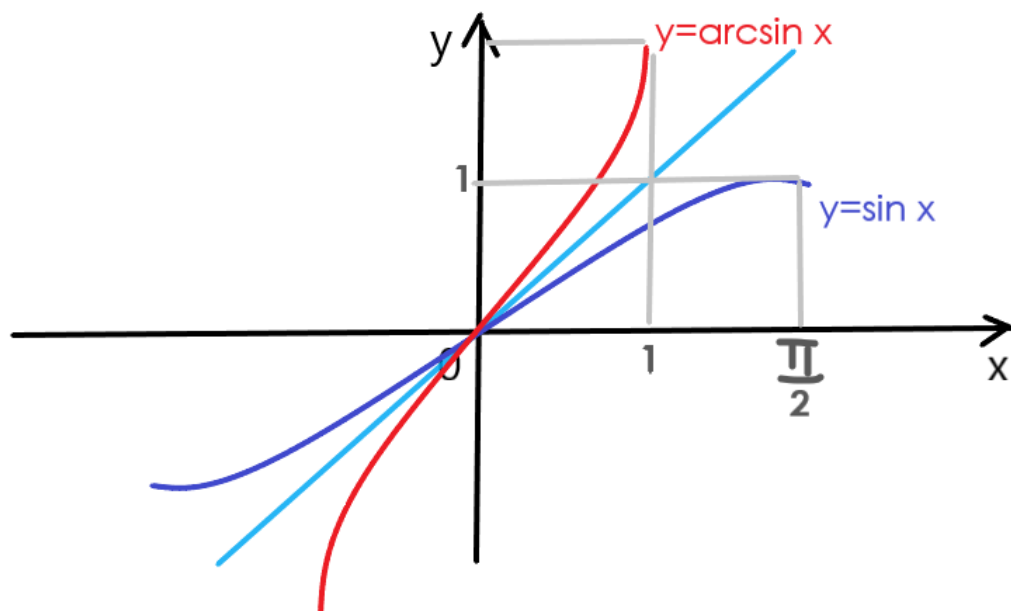
Funkcje **cyklometryczne** to funkcje odwrotne do odpowiednich iniektywnych zacieśnień funkcji trygonometrycznych.

Rozważmy zacieśnienie

$$\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ni x \longmapsto \sin x \in [-1, 1].$$

Jest to bijekcja, zatem funkcja odwrotna jest dobrze określona

$$\text{arc sin} := \left(\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}\right)^{-1} : [-1, 1] \ni x \longmapsto \text{arc sin } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

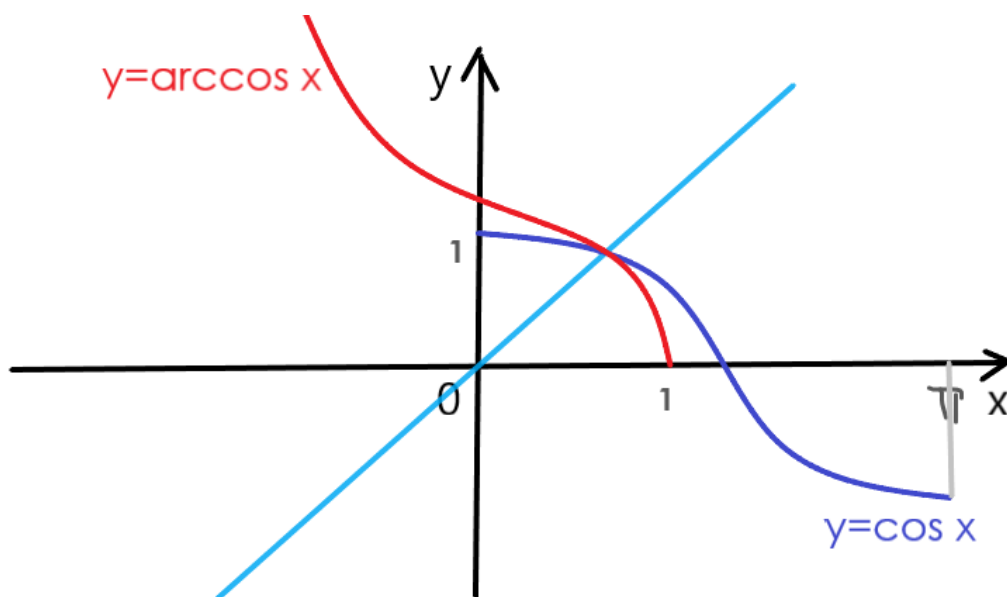


Zacieśnienie

$$\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \ni x \mapsto \cos x \in [-1,1]$$

jest bijekcją i funkcja odwrotna do niej to

$$\text{arc cos} := (\cos|_{[0,\pi]})^{-1} : [-1,1] \ni x \mapsto \arccos x \in [0,\pi].$$



Analogicznie rozważamy zacieśnienia

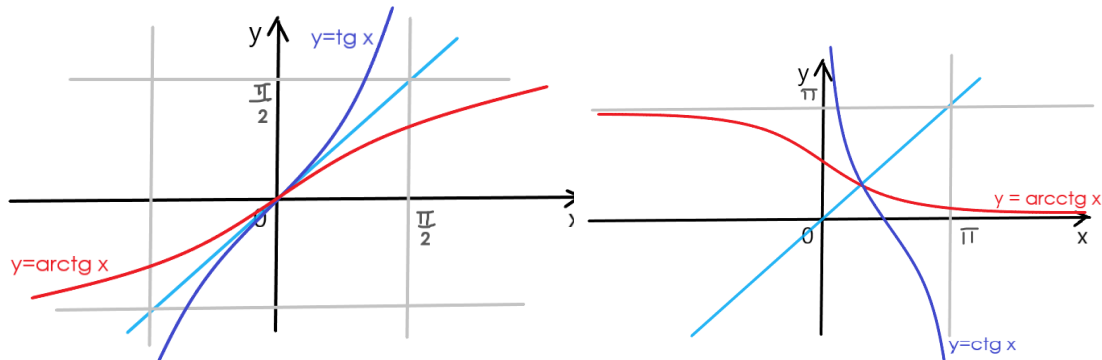
$$\operatorname{tg} |_{(-\pi/2, \pi/2)} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni x \mapsto \operatorname{tg} x \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{ctg} |_{(0, \pi)} : (0, \pi) \ni x \mapsto \operatorname{ctg} x \in \mathbb{R}$$

i odwrotne do nich

$$\operatorname{arctg} := (\operatorname{tg} |_{(-\pi/2, \pi/2)})^{-1} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\operatorname{arcctg} := (\operatorname{ctg} |_{(0, \pi)})^{-1} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arcctg} x \in (0, \pi).$$



Wprost z definicji funkcji odwrotnych mamy:

dla  $x \in [-1, 1]$ :

$$\arcsin x = y \iff y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ i } \sin y = x,$$

$$\arccos x = y \iff y \in [0, \pi] \text{ i } \cos y = x,$$

oraz dla  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\operatorname{arctg} x = y \iff y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ i } \operatorname{tg} y = x,$$

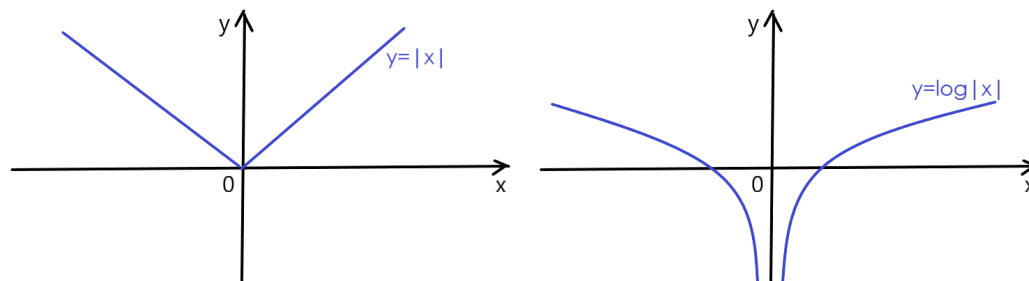
$$\operatorname{arcctg} x = y \iff y \in (0, \pi) \text{ i } \operatorname{ctg} y = x.$$

## 2.2 Pewne funkcje nieelementarne

Zacznijmy od funkcji moduł

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}.$$

Tę funkcję często będziemy stosować. Dzięki niej dla dowolnego  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  można rozważać funkcję  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \log_a |x| \in \mathbb{R}$ , która jest naturalnym rozwiązaniem pewnego równania różniczkowego.

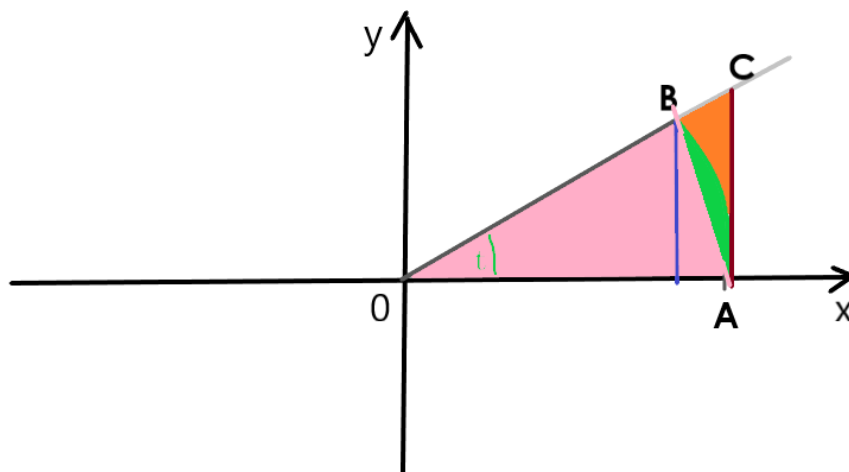


Tu sobie udowodnimy coś, co nam się później przyda.

**Własność 2.2.1** •  $\forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \quad |\sin t| < |t| < |\operatorname{tg} t|;$

•  $\forall t \in \mathbb{R} : |\sin t| \leq |t|$ , przy czym równość zachodzi tylko dla  $t = 0$ .

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $t \in (0, \pi/2)$ . W układzie współrzędnych rysujemy punkty  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B$  w pierwszej ćwiartce taki, że  $OA = OB$  oraz  $\angle AOB = t$  (czyli  $B(\cos t, \sin t)$ ), wreszcie punkt  $C$  na prostej  $OB$  taki, że  $\angle OAC = \pi/2$  (czyli  $C(1, \operatorname{tg} t)$ ). Wtedy  $OA = OB = 1$ , wysokość  $\triangle OAB$  opuszczona na bok  $OA$  ma długość  $\sin t$ , oraz  $AC = \operatorname{tg} t$ .



Zauważmy, że pole  $\triangle OAB$  jest mniejsze od pola wycinka koła  $AOB$  (chodzi o koło o środku  $O$  i promieniu 1), a ono jest mniejsze od pola  $\triangle OAC$ . To znaczy

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin t < \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{t}{2\pi} < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} t.$$

Z dowolności  $t$  otrzymaliśmy zatem

$$\forall t \in (0, \pi/2) : \quad \sin t < t < \operatorname{tg} t.$$

Ponieważ sinus i tangens są dodatnie w pierwszej ćwiartce, więc możemy zapisać

$$\forall t \in (0, \pi/2) : \quad |\sin t| < |t| < |\operatorname{tg} t|,$$

ale stąd i z nieparzystości funkcji sinus i tangens, jeśli  $t \in (-\pi/2, 0)$ , to

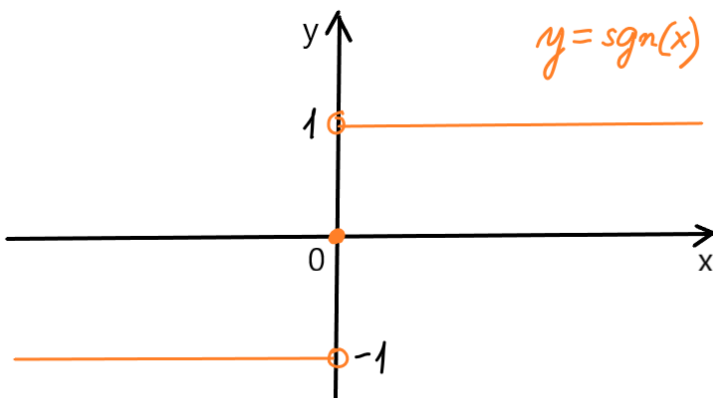
$$|\sin t| = |-\sin(-t)| = |\sin(-t)| < |-t| = |t| = |-t| < |\operatorname{tg}(-t)| = |-\operatorname{tg}(-t)| = |\operatorname{tg} t|,$$

czyli ostatecznie pokazaliśmy pierwszą tezę.

Drugą tezę można stąd wywnioskować (ćwiczenie). ■

Funkcja **signum** (znak):  $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana jest wzorem

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1, & \text{gdy } x < 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \\ 1, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}.$$



Zauważmy, że

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad |x| = x \operatorname{sgn} x.$$

Funkcjami **hiperbolicznymi** nazywamy

$$\sinh : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \in \mathbb{R};$$

$$\cosh : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \in \mathbb{R};$$

oraz funkcje dane wzorami:

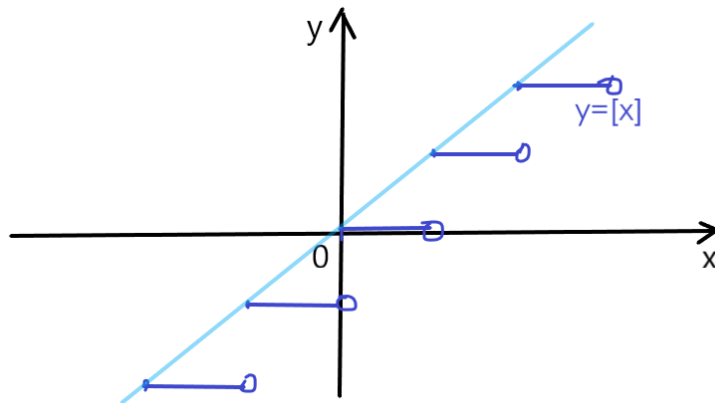
$$\operatorname{tgh}(x) := \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \operatorname{ctgh}(x) := \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Funkcjami **area** nazywamy funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych (lub ich zacieśnień, jeśli nie są iniektywne).

Warto wyznaczyć tożsamości hiperboliczne oraz wzory funkcji area.

I jeszcze jedna funkcja, która jest użyteczna – **cecha** (nazywana także **podłogą**):

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto [x] = \lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \in \mathbb{Z}.$$



Często stosować będziemy nierówności

$$(2.2) \quad \forall x \in \mathbb{R} : \quad [x] \leq x < [x] + 1,$$

które wynikają wprost z definicji.

## 2.3 Monotoniczność

Uściślimy teraz dobrze znane ze szkoły pojęcia.

**Definicja 2.3.1 (Ekstremum globalne)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $a \in A$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Mówimy, że  $f$  ma w  $a$  **maksimum** (odp. **minimum**) globalne, gdy  $\forall x \in A : f(x) \leq f(a)$  (odp.  $f(x) \geq f(a)$ ).

**Ekstremum** to albo maksimum, albo minimum.

Na przykład funkcja moduł ma w 0 minimum globalne.

**Definicja 2.3.2 (Monotoniczność)** Mówimy, że funkcja jest **stała**, jeśli w każdym punkcie swojej dziedziny przyjmuje tę samą wartość.

Niech  $A \subset \mathbb{R}$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Mówimy, że  $f$  jest **niemalejąca** (inaczej **słabo rosnąca**), jeśli

$$\forall x, y \in A : \quad x < y \implies f(x) \leq f(y).$$

Mówimy, że  $f$  jest *rosnąca* (inaczej *silnie rosnąca*), jeśli

$$\forall x, y \in A : \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

Mówimy, że  $f$  jest *nierosnąca* (inaczej *słabo malejąca*), jeśli

$$\forall x, y \in A : \quad x < y \implies f(x) \geq f(y).$$

Mówimy, że  $f$  jest *malejąca* (inaczej *silnie malejąca*), jeśli

$$\forall x, y \in A : \quad x < y \implies f(x) > f(y).$$

Mówimy, że  $f$  jest *monotoniczna*, jeśli jest stała lub nierosnąca lub niemalejąca.

O pewnych funkcjach silnie rosnących mówiłam już wcześniej, funkcja cecha jest niemalejąca.

Badając monotoniczność funkcji, wyznaczamy tę monotoniczność na przedziałach. Przykładowo funkcja  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$  nie jest monotoniczna, ale jest malejąca w  $(-\infty, 0)$ , jak również w  $(0, +\infty)$ . Funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$  jest malejąca w  $(-\infty, 0]$  i rosnąca w  $[0, +\infty)$ .

Ćwiczenie: zbadanie z definicji monotoniczności funkcji hiperbolicznych.

**Własność 2.3.3** Niech  $A \subset \mathbb{R}$ . Jeśli  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$  jest silnie rosnąca (odp. *silnie malejąca*), to istnieje  $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$  i jest też silnie rosnąca (odp. *silnie malejąca*).

**Dowód:** Załóżmy, że  $f$  jest silnie rosnąca (drugi przypadek jest symetryczny). To oznacza, że jest iniekcją. Zatem  $f : A \longrightarrow f(A)$  jest bijekcją.

Ustalmy dowolne dwa różne punkty  $y, z \in f(A)$  i niech  $u = f^{-1}(y), v = f^{-1}(z)$ . Z definicji funkcji odwrotnej mamy

$$u = f^{-1}(y) \iff y = f(u) \quad \text{oraz} \quad v = f^{-1}(z) \iff z = f(v).$$

Zauważmy najpierw, że  $z \neq y \iff u \neq v$ , co wynika z definicji funkcji i iniektywności. Z monotoniczności natomiast wynika

$$u < v \implies y = f(u) < f(v) = z.$$

Wobec tego, że wiemy, że  $y \neq z$  z założenia i w konsekwencji  $u \neq v$ , kontrapozycja tej implikacji to

$$y > z \implies f^{-1}(y) = u > v = f^{-1}(z),$$

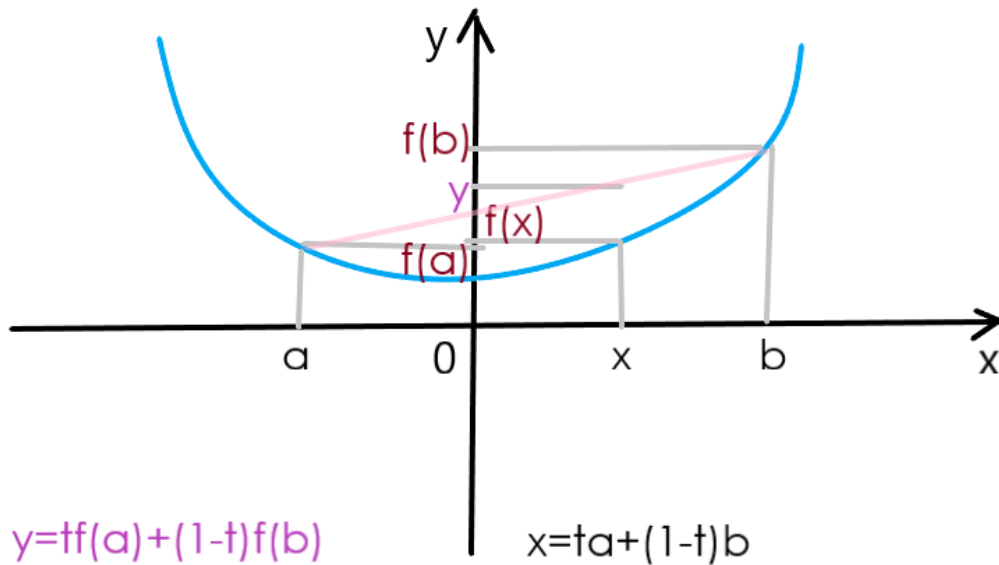
co kończy dowód. ■

## 2.4 Wypukłość

**Definicja 2.4.1 (Funkcje wypukłe i wklęsłe)** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Mówimy, że  $f$  jest *wypukła*, jeśli

$$\forall a, b \in A \forall t \in [0, 1] : \quad f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Natomiast  $f$  jest *wklęsła*, jeśli funkcja  $h := -f$  jest wypukła.



Funkcja liniowa jest zarówno wypukła, jak i wklęsła. Moduł jest wypukły (ćwiczenie).

**Przykład 2.4.2** • Funkcja kwadratowa  $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$  jest wypukła.

• Funkcja  $[0, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$  jest wklęsła.

**Dowód:** Pokażemy wypukłość funkcji kwadratowej. Wklęsłość pierwiastkowej – ćwiczenie.

Ustalmy dowolne  $a, b \in \mathbb{R}$  oraz  $t \in [0, 1]$ . Wtedy

$$t(1-t)(a-b)^2 \geq 0.$$

Będziemy tę nierówność przekształcać równoważnie

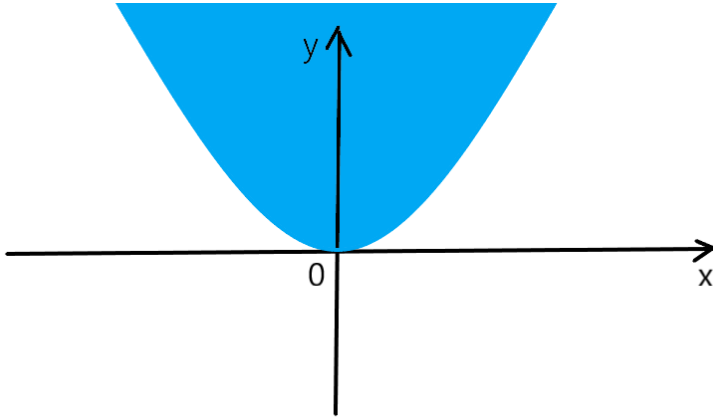
$$\begin{aligned}
 (t-t^2)(a^2-2ab+b^2) &\geq 0 \\
 ta^2 + (t-t^2)b^2 &\geq (ta)^2 + 2ta(1-t)b + ((1-t)b)^2 - (1-t)^2b^2 \\
 ta^2 + (t-t^2+1-2t+t^2)b^2 &\geq (ta + (1-t)b)^2 \\
 ta^2 + (1-t)b^2 &\geq (ta + (1-t)b)^2 \\
 tg(a) + (1-t)g(b) &\geq g(ta + (1-t)b).
 \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy żadaną nierówność. ■

Przypomnijmy, że  $\mathbb{R}^2$  można utożsamić z  $\mathbb{C}$ .

**Własność 2.4.3** *Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , to  $f$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej nadwykres, to znaczy zbiór  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y \geq f(x)\}$  jest zbiorem wypukłym.*

**Dowód:** ćwiczenie. ■



**Twierdzenie 2.4.4 (Nierówność Jensena)** <sup>8</sup>

*Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , to  $f$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x_1, \dots, x_n \in A \forall t_1, \dots, t_n \geq 0 : \sum_{j=1}^n t_j = 1 \implies f\left(\sum_{j=1}^n t_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n t_j f(x_j).$$

**Dowód:** ( $\Leftarrow$ ) Wystarczy wziąć  $n = 2$  (bo  $t_2 = 1 - t_1$ ).

( $\Rightarrow$ ) Dowód indukcyjny względem  $n$ .

I. Jeśli  $n = 1$ , to  $t_1 = 1$  i nierówność wynika z równości  $f(t_1 x_1) = f(x_1) = t_1 f(x_1)$ .  
Jeśli  $n = 2$ , to mamy bezpośrednie wynikanie z definicji wypukłości (bo  $t_2 = 1 - t_1$ ).

II. Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla pewnego  $n \geq 2$ .

Ustalmy dowolne  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in A$  oraz  $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \geq 0$  takie, że  $\sum_{j=1}^{n+1} t_j = 1$ .

Jeśli  $t_{n+1} = 0$ , to z założenia indukcyjnego

$$f\left(\sum_{j=1}^{n+1} t_j x_j\right) = f\left(\sum_{j=1}^n t_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n t_j f(x_j) = \sum_{j=1}^{n+1} t_j f(x_j).$$

---

<sup>8</sup>Johan Jensen, 1859-1925, matematyk duński

Jeśli natomiast  $t_{n+1} \neq 0$ , to oczywiście  $t_n + t_{n+1} > 0$ . Możemy wtedy napisać

$$t_n x_n + t_{n+1} x_{n+1} = (t_n + t_{n+1}) \left( \frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1} \right) = sy,$$

gdzie  $s := t_n + t_{n+1}$  oraz

$$y = \frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1} = \left( 1 - \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} \right) x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1}.$$

Zauważmy, że  $y \in A$  na mocy Charakteryzacji przedziału (Własność 1.5.7). Stosujemy założenie indukcyjne do

$$t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, s, \quad x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y.$$

Możemy, bo

$$t_1 + \dots + t_{n-1} + s = \sum_{j=1}^{n+1} t_j = 1.$$

Zatem z założenia indukcyjnego, definicji  $s$  i  $y$  oraz definicji wypukłości

$$\begin{aligned} f \left( \sum_{j=1}^{n+1} t_j x_j \right) &= f \left( \sum_{j=1}^{n-1} t_j x_j + sy \right) \leq \sum_{j=1}^{n-1} t_j f(x_j) + sf(y) = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} t_j f(x_j) + (t_n + t_{n+1}) f \left( \frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} x_n + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} x_{n+1} \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} t_j f(x_j) + (t_n + t_{n+1}) \left( \frac{t_n}{t_n + t_{n+1}} f(x_n) + \frac{t_{n+1}}{t_n + t_{n+1}} f(x_{n+1}) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} t_j f(x_j), \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny. ■

### 3 Ciągi liczbowe

Każdą funkcję  $a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{K}$  nazywamy **ciąg** o wyrazach w  $\mathbb{K}$ . Jeśli  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , to mamy do czynienia z **ciąg** **rzeczywistym**, jeśli  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , z **ciąg** **zespółonym**.

Piszemy  $a_n$  zamiast  $a(n)$  i nazywamy tę liczbę  $n$ -tym **wyrazem** ciągu.

Oznaczenie ciągu:  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , czasami też skrótowo  $(a_n)$ .

Niech  $A \subset \mathbb{K}$ . Zapis  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset A$  oznacza, że  $\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset A$ .

Chciałabym podkreślić, że lepiej jest pisać  $(a_n)$ , jeśli mamy na myśli ciąg. Natomiast  $a_n$  to jest liczba,  $n$ -ty wyraz tego ciągu.

Sposoby zadawania ciągu ( $n \in \mathbb{N}^*$ ):

- **wzór ogólny**, np.

$$\begin{aligned} a_n &= n; & \text{to znaczy } a_1 &= 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \dots, a_7 = 7, \dots \\ b_n &= b + (n-1)r, & (\text{ciąg arytmetyczny}); \\ c_n &= cq^{n-1}, & (\text{ciąg geometryczny}); \end{aligned}$$

- **wzór rekurencyjny**, np.

$$\begin{aligned} b_1 &= b, b_{n+1} = b_n + r, & (\text{ciąg arytmetyczny}); \\ c_1 &= c, c_{n+1} = c_n q, & (\text{ciąg geometryczny}); \\ x_1 &= 1, x_2 = 1, x_{n+2} = x_n + x_{n+1}, & (\text{ciąg Fibonacciego}); \end{aligned}$$

9

- **opis**: np.  $p_n$  jest  $n$ -tą liczbą pierwszą.

Przy badaniu ciągów często używać będziemy formuły **prawie wszystkie wyrazy ciągu**. Oznacza to wszystkie za wyjątkiem skończonej ilości. Równoważnie można powiedzieć: wszystkie wyrazy począwszy od pewnego ustalonego numeru  $N$ . Precyzyjniej: mówimy, że własność  $W$  zachodzi dla prawie wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  (albo  $a_n$  ma własność  $W$  dla prawie wszystkich liczb naturalnych  $n \in \mathbb{N}^*$ ), jeśli  $\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : a_n$  ma własność  $W$ .

#### 3.1 Granica ciągu – podstawowe własności

**Definicja 3.1.1 (Granica ciągu)** Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$  oraz  $a \in \mathbb{C}$ .

Mówimy, że ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty$  jest **zbieżny** do  $a$ , albo że  $a$  jest **granicą** ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$$

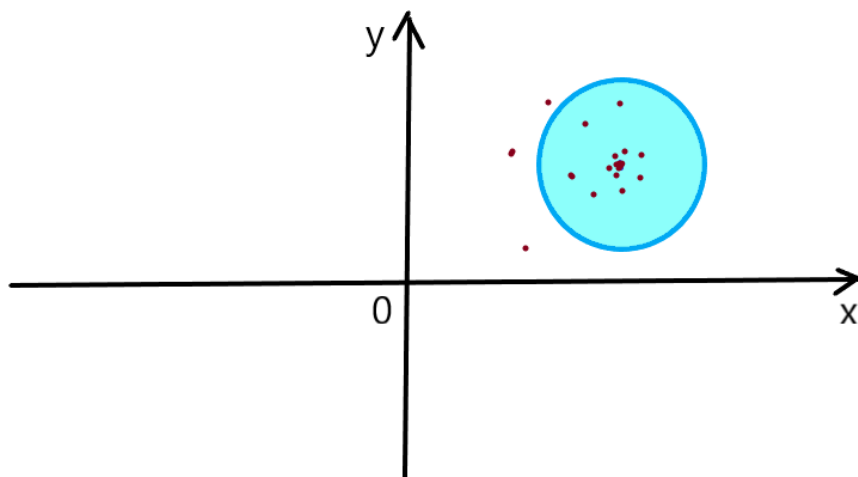
Jeśli ciąg nie ma granicy, to mówimy, że jest **rozbieżny**.

---

<sup>9</sup>Fibonacci (Leonardo z Pizy), 1175-1250, matematyk włoski

Oznaczenia: Jeśli  $a$  jest granicą ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , piszemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{lub} \quad a_n \longrightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \quad \text{lub} \quad a_n \rightarrow a.$$



**Przykład 3.1.2** ( $\iota$ ) Jeśli  $c \in \mathbb{C}$ , to ciąg stały  $(c)_{n=1}^{\infty}$  jest zbieżny do  $c$ .

$$(\iota) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{n} \right).$$

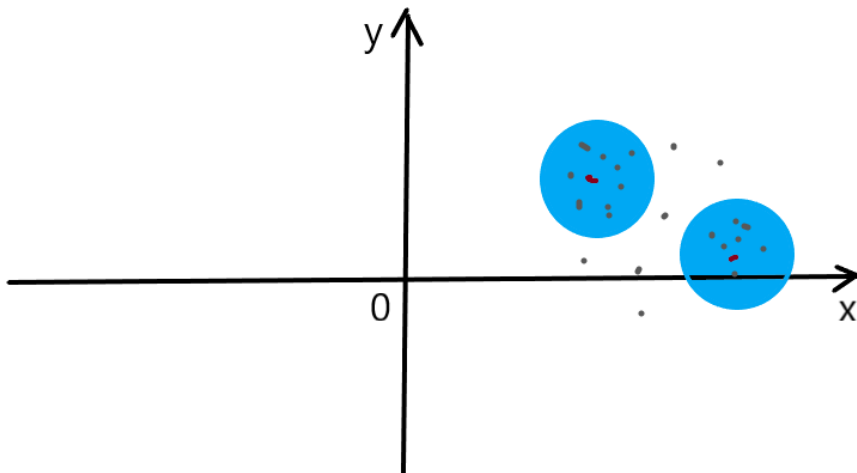
**Dowód:** ( $\iota$ ) Połóżmy  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n = c$ . Zauważmy, że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : |a_n - c| = |c - c| = 0$ . A stąd

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = 1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |a_n - c| < \varepsilon.$$

( $\iota$ ) Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Niech  $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ . Jeśli teraz  $n \geq N$ , to  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  z (2.2), a to jest równoważne temu, że  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| -\frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ . Pokazaliśmy, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{i} \quad \left| -\frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

■



**Twierdzenie 3.1.3 (Jedyność granicy)** *Każdy ciąg ma co najwyżej jedną granicę.*

**Dowód:** Dla dowodu nie wprost załóżmy, że  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  ma dwie różne granice  $a$  i  $b$ . Ponieważ  $a \neq b$ , więc

$$\varepsilon_0 := \frac{|a - b|}{3} > 0.$$

Z definicji granicy ciągu wynika, że

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \varepsilon_0 \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_2 : |a_n - b| < \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Dla  $N := N_1 + N_2$  obie nierówności powyżej zachodzą, zatem wobec nierówności trójkąta dla modułu (Własność 1.6.1)

$$3\varepsilon_0 = |a - b| = |(a_N - b) - (a_N - a)| \leq |a_N - b| + |a_N - a| < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód. ■

Nie każdy ciąg ma granicę, to znaczy istnieją ciągi rozbieżne.

**Przykład 3.1.4** *Ciąg  $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$  nie ma granicy.*

**Dowód:** Niech  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n := (-1)^n$ .

Założmy dla dowodu nie wprost, że  $\exists a : a_n \longrightarrow a$ . Z definicji granicy ciągu istnieje takie  $N \in \mathbb{N}^*$ , że dla  $n \geq N$  zachodzi

$$|(-1)^n - a| < \frac{1}{2}.$$

W szczególności dla  $n = 2N$  mamy  $|1-a| < \frac{1}{2}$  oraz dla  $n = 2N+1$  mamy  $|-1-a| < \frac{1}{2}$ . Stąd z nierówności trójkąta dla modułu

$$2 = |2| = |1 - (-1)| = |1 - a - (-1 - a)| \leq |1 - a| + |-1 - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

a to jest sprzeczność. ■

**Własność 3.1.5** *Niech  $(z_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$ . Wtedy*

$$z_n \longrightarrow z \iff (\operatorname{Re} z_n \longrightarrow \operatorname{Re} z \text{ oraz } \operatorname{Im} z_n \longrightarrow \operatorname{Im} z).$$

**Dowód:**  $(\implies)$  Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ  $z_n \longrightarrow z$ , więc z definicji granicy ciągu

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |z_n - z| < \varepsilon.$$

Z definicji części rzeczywistej i części urojonej oraz z Własności 1.6.1 modułu mamy

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| \text{ oraz } |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| = |\operatorname{Im}(z_n - z)| \leq |z_n - z|,$$

zatem z przechodniości nierówności dla  $n \geq N$

$$|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| < \varepsilon \text{ oraz } |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| < \varepsilon.$$

$(\impliedby)$  ćwiczenie. ■

**Wniosek 3.1.6** *Jeśli  $a \in \mathbb{C}, (a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  i  $a_n \longrightarrow a$ , to  $a \in \mathbb{R}$ .*

**Dowód:** Z Własności 3.1.5 wynika, że  $\operatorname{Im} a_n \longrightarrow \operatorname{Im} a$ . Ponieważ  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ , więc ciąg  $(\operatorname{Im} a_n)_{n=1}^\infty$  jest stały o wartości 0. Na mocy Przykładu 3.1.2 jest więc zbieżny do 0. Wobec Twierdzenia 3.1.3 o jedności granicy  $\operatorname{Im} a = 0$ , a to oznacza, że  $a \in \mathbb{R}$ . ■

**Definicja 3.1.7 (Ograniczoność ciągu)** *Mówimy, że ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$  jest **ograniczony**, jeśli zbiór jego wyrazów, to znaczy zbiór  $\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ , jest ograniczony.*

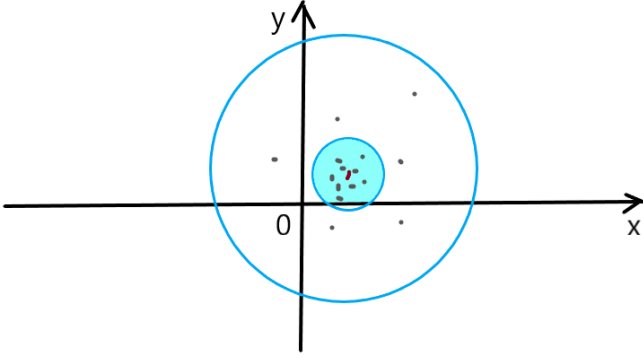
*Mówimy, że ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  jest **ograniczony od góry** (odp. **od dołu**), gdy zbiór jego wyrazów  $\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$  jest ograniczony od góry (odp. **od dołu**).*

**Twierdzenie 3.1.8 (Ograniczoność ciągu zbieżnego)** *Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.*

**Dowód:** Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$  i  $a_n \rightarrow a$ . Z definicji granicy

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |a_n - a| < 1.$$

Niech  $R := \max\{|a_1 - a|, |a_2 - a|, \dots, |a_{N-1} - a|\}$ , jeśli  $N \geq 2$  oraz  $R := 0$ , jeśli  $N = 1$ . Wtedy  $\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset K(a, R + 1)$ . ■



### Własność 3.1.9

1. Ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  jest ograniczony od góry (odp. *od dołu*) wtedy i tylko wtedy, gdy  $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M$  (odp.  $a_n \geq M$ ) dla prawie wszystkich  $n$ .
2. Niech  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ . Następujące warunki są równoważne:
  - Ciąg  $(b_n)_{n=1}^\infty$  jest ograniczony.
  - $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* : |b_n| < M$ .
  - Istnieje takie  $M > 0$ , że  $|b_n| < M$  dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Dowód:** ćwiczenie ■

Zgodnie z ogólnymi oznaczeniami  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$  oznacza rodzinę wszystkich ciągów zespolonych,  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$  – ciągów rzeczywistych. Niech  $\mathcal{C}$  oznacza rodzinę wszystkich ciągów zespolonych zbieżnych.

$$\lim : \mathcal{C} \ni (a_n)_{n=1}^\infty \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{C}$$

jest dobrze określoną funkcją. Ponadto  $\lim|_{(\mathcal{C} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*})} : \mathcal{C} \cap \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 3.2 Granica a działania

**Definicja 3.2.1 (Suma, iloczyn, iloraz ciągów)** Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ . *Sumę* ciągów  $(a_n)_{n=1}^\infty$  i  $(b_n)_{n=1}^\infty$  nazywamy *ciąg postaci*  $(a_n + b_n)_{n=1}^\infty$ , natomiast *iloczynem* ciąg  $(a_n b_n)_{n=1}^\infty$ . Ponadto, jeśli  $\forall n \in \mathbb{N}^* : b_n \neq 0$ , to *ilorazem* ciągów  $(a_n)_{n=1}^\infty$  i  $(b_n)_{n=1}^\infty$  nazywamy *ciąg postaci*  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^\infty$ .

Zaczniemy od szczególnych przypadków działań na ciągach.

**Lemat 3.2.2** *Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Następujące warunki są równoważne:*

- (1)  $a_n \longrightarrow a$ ,
- (2)  $a_n - a \longrightarrow 0$ ,
- (3)  $|a_n - a| \longrightarrow 0$ .

**Dowód:** Wystarczy zauważyć, że  $|a_n - a| = |(a_n - a) - 0| = ||a_n - a| - 0|$ . ■

**Lemat 3.2.3** *Jeśli  $a_n \longrightarrow 0$  i  $b_n \longrightarrow 0$ , to  $a_n + b_n \longrightarrow 0$ .*

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : |a_n| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_2 : |b_n| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Niech teraz  $N = N_1 + N_2$  i  $n \geq N$ . Wtedy z nierówności trójkąta dla modułu

$$|(a_n + b_n) - 0| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

**Lemat 3.2.4** *Jeśli  $a_n \longrightarrow 0$  i  $c \in \mathbb{C}$ , to  $ca_n \longrightarrow 0$ .*

**Dowód:** Jeśli  $c = 0$ , to ciąg  $(ca_n)_{n=1}^\infty$  jest stały, stale równy 0, zatem zbieżny do 0 (Przykład 3.1.2).

Niech teraz  $c \neq 0$ . Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |a_n| < \frac{\varepsilon}{|c|},$$

ale to jest równoważne temu, że

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |ca_n - 0| < \varepsilon.$$

■

**Twierdzenie 3.2.5 (O iloczynie ciągów ograniczonego i zbieżnego do zera)**

*Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ . Jeśli  $a_n \longrightarrow 0$  i  $(b_n)_{n=1}^\infty$  jest ograniczony, to  $a_n b_n \longrightarrow 0$ .*

**Dowód:** Na mocy Własności 3.1.9

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : |b_n| < M.$$

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy ciągu wynika, że

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |a_n| = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Niech teraz  $n \geq N$ . Wtedy z Własności 1.6.1 modułu i przechodniości nierówności

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| \leq M |a_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

■

**Lemat 3.2.6** *Założmy, że  $b_n \rightarrow b$ , gdzie  $b \neq 0$ , oraz  $\forall n \in \mathbb{N}^* : b_n \neq 0$ . Wtedy ciąg  $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$  jest ograniczony.*

**Dowód:** Z definicji granicy ciągu wynika, że

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |b_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Ponieważ  $|b| - |b_n| \leq |b_n - b|$  wobec Własności 1.6.1 modułu, mamy  $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ , a stąd

$$\forall n \geq N : \left| \frac{1}{b_n} \right| < \frac{2}{|b|},$$

a to wystarcza wobec Własności 3.1.9. ■

**Twierdzenie 3.2.7 (O działaniach na granicach)** *Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$  oraz  $a_n \rightarrow a$  i  $b_n \rightarrow b$ . Wtedy  $a_n + b_n \rightarrow a + b$  oraz  $a_n b_n \rightarrow ab$ .*

*Ponadto, jeśli  $b \neq 0$  i  $\forall n \in \mathbb{N}^* : b_n \neq 0$ , to  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ .*

**Dowód:** (Suma) Z Lematu 3.2.2 wynika, że  $a_n - a \rightarrow 0$  i  $b_n - b \rightarrow 0$ . A ponieważ  $(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b)$ , więc  $(a_n + b_n) - (a + b) \rightarrow 0$  na mocy Lematu 3.2.3. Wystarczy jeszcze raz skorzystać z Lematu 3.2.2.

(Iloczyn) Ciąg  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jest zbieżny, zatem ograniczony (Twierdzenie 3.1.8). Z założenia  $b_n \rightarrow b$ , stąd  $b_n - b \rightarrow 0$  na mocy Lematu 3.2.2, zatem  $a_n(b_n - b) \rightarrow 0$  na mocy Twierdzenia o iloczynie ciągów ograniczonego i zbieżnego do zera (Twierdzenie 3.2.5).

$a_n - a \rightarrow 0$  na mocy Lematu 3.2.2, zatem  $b(a_n - a) \rightarrow 0$  na mocy Lematu 3.2.4.

Wobec tego

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a) \longrightarrow 0$$

na mocy Lematu 3.2.3. Wystarczy znowu skorzystać z Lematu 3.2.2.

(Iloraz)

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n}(b_n - b).$$

$b_n - b \longrightarrow 0$  z Lematu 3.2.2, ciąg  $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$  jest ograniczony na mocy Lematu 3.2.6,

zatem  $\frac{1}{b_n}(b_n - b) \longrightarrow 0$  na mocy Twierdzenia 3.2.5 o iloczynie ciągów ograniczonego i zbieżnego do 0. A stąd  $-\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{b_n}(b_n - b) \longrightarrow 0$  na mocy Lematu 3.2.4 i wobec tego

$$\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b}$$

na mocy Lematu 3.2.2.

Wystarczy teraz zauważyć, że  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$  i zastosować udowodnioną już tezę o iloczynie. ■

Zwróćmy uwagę, że wobec Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach dodawanie i mnożenie są działaniami w zbiorze ciągów zbieżnych  $c$ , przy czym  $c$  nie jest z tymi działaniami ciałem, bo nie wszystkie niezerowe ciągi zbieżne mają elementy odwrotne względem mnożenia, problem jest z ciągami zbieżnymi do zera. Na przykład można rozważyć  $(1/n)_{n=1}^{\infty} \in c$ , ale ciąg odwrotności  $(n)_{n=1}^{\infty} \notin c$  (nie jest zbieżny – ćwiczenie).

### 3.3 Granica a porządek

W tym podrozdziale będziemy mówić o nierównościach, zatem dotyczy on tylko ciągów o wyrazach rzeczywistych, bo w  $\mathbb{C}$  nie mamy dobrego porządku.

#### Twierdzenie 3.3.1 (O zachowaniu nierówności słabej w granicy)

Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ . Jeśli  $a_n \leq b_n$  dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$  oraz  $a_n \longrightarrow a$  i  $b_n \longrightarrow b$ , to  $a \leq b$ .

**Dowód:** Zauważmy, że  $a, b \in \mathbb{R}$  wobec Wniosku 3.1.6.

Założmy dla dowodu nie wprost, że  $b < a$  i weźmy  $\varepsilon_0 := (a - b)/3$ . Z definicji granicy ciągu wynika, że

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : \quad a - a_n &< \varepsilon_0, \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_2 : \quad b_n - b &< \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Z założenia istnieje takie  $N_3 \in \mathbb{N}^*$ , że  $\forall n \geq N_3 : a_n \leq b_n$ . Weźmy teraz  $N := N_1 + N_2 + N_3$ . Dla takiego  $N$  zachodzą wszystkie trzy nierówności powyżej, to znaczy mamy

$$(3.1) \quad a - \varepsilon_0 < a_N, \quad b_N < b + \varepsilon_0, \quad a_N \leq b_N.$$

Wykorzystując dwie pierwsze nierówności i definicję  $\varepsilon_0$  otrzymujemy

$$b_N < b + \varepsilon_0 = \frac{2b + a}{3} < \frac{b + 2a}{3} = a - \varepsilon_0 < a_N,$$

a to jest sprzeczność z trzecią nierównością w (3.1). ■

Uwaga: silna nierówność nie musi być zachowana. Na przykład mamy  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n} > 0$  oraz  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  i  $0 \rightarrow 0$  (Przykład 3.1.2).

**Wniosek 3.3.2** *Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Jeśli  $a_n \leq \alpha$  (odp.  $a_n \geq \alpha$ ) dla prawie wszystkich  $n$  oraz  $a_n \rightarrow a$ , to  $a \leq \alpha$  (odp.  $a \geq \alpha$ ).*

**Dowód:** Stosujemy Twierdzenie 3.3.1 dla ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  i ciągu stałego  $(\alpha)_{n=1}^\infty$  (Przykład 3.1.2). ■

**Twierdzenie 3.3.3 (O zachowaniu znaku)** *Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Jeśli  $a_n \rightarrow a$  i  $a > 0$  (odp.  $a < 0$ ), to prawie wszystkie wyrazy ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  są dodatnie (odp. ujemne).*

**Dowód:** Niech  $a > 0$  (przypadek  $a < 0$  jest symetryczny – ćwiczenie). Z definicji granicy ciągu wynika, że

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : a - a_n < \frac{a}{2},$$

a stąd, ponieważ  $a_n > a/2 > 0$ , otrzymujemy (z przechodniości porządku)

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : a_n > 0.$$

■

**Twierdzenie 3.3.4 (O trzech ciągach)**

*Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $g \in \mathbb{R}$ . Jeśli  $a_n \leq b_n \leq c_n$  dla prawie wszystkich  $n$  oraz  $a_n \rightarrow g$  i  $c_n \rightarrow g$ , to  $b_n \rightarrow g$ .*

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy ciągu wynika, że

$$\begin{aligned}\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : & \quad g - \varepsilon < a_n, \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_2 : & \quad c_n < g + \varepsilon.\end{aligned}$$

Ponadto z założenia

$$\exists N_3 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_3 : \quad a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Niech teraz  $N = N_1 + N_2 + N_3$  oraz  $n \geq N$ . Wtedy możemy zapisać dzięki powyższym nierównościom

$$g - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < g + \varepsilon,$$

a stąd i z przechodniości nierówności

$$g - \varepsilon < b_n < g + \varepsilon,$$

czyli  $|b_n - g| < \varepsilon$ , c.k.d. ■

**Przykład 3.3.5**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ .

**Dowód:** Mamy dla  $n \in \mathbb{N}^*$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

A ponieważ skrajne ciągi zbieżają do 0 (Przykład 3.1.2), wystarczy skorzystać z Twierdzenia o trzech ciągach (Twierdzenie 3.3.4). ■

### Lemat 3.3.6

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists (q_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q} \cap (x, +\infty) \quad \exists (r_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q} \cap (-\infty, x) : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n.$$

**Dowód:** Pokażemy istnienie ciągu  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$  (ciąg  $(r_n)_{n=1}^{\infty}$  – ćwiczenie).

Dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}^*$  na mocy Własności 1.4.6 gęstości  $\mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$  istnieje taka liczba  $q_n \in \mathbb{Q}$ , że

$$x < q_n < x + \frac{1}{n}.$$

Na mocy Przykładu 3.1.2 ciąg stały  $(x)_{n=1}^{\infty}$  jest zbieżny do  $x$  oraz  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , zatem na mocy Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach  $x + \frac{1}{n} \rightarrow x$ . Na mocy Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach  $q_n \rightarrow x$ . ■

Uwaga, tu można dodatkowo znaleźć odpowiednie ciągi liczb niewymiernych – ćwiczenie.

**Lemat 3.3.7** Niech  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ . Wtedy

$$\beta \geq \alpha \iff \forall x < \alpha : \beta \geq x.$$

Ponadto jeśli  $\alpha > -\infty$ , to

$$\beta \geq \alpha \iff \exists t \in (-\infty, \alpha) \forall x \in (t, \alpha) : \beta \geq x.$$

**Dowód:** W przypadku  $\alpha = -\infty$  warunek z lewej strony pierwszej równoważności jest pusto spełniony (nie ma takiego  $x$ ).

( $\implies$ ) Dla  $\alpha = +\infty$  można wziąć  $t = 0$ , dla  $\alpha \in \mathbb{R}$  natomiast  $t = \alpha - 1$ . Implikacja wynika z przechodniości nierówności.

( $\impliedby$ ) Jeśli  $\alpha = +\infty$ , to implikacja jest oczywista, bo wtedy  $\beta$  musi być też nieskończonością. Jeśli  $\beta = +\infty$ , to oczywiście jest większa lub równa od  $\alpha$ .

Pozostał do rozważenia przypadek  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wiemy, że  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  wobec Przykładu 3.1.2. Ponieważ  $\alpha - t > 0$ , więc z definicji granicy ciągu

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \frac{1}{n} < \alpha - t,$$

czyli  $t < \alpha - \frac{1}{n} < \alpha$  dla takich  $n$ . Z założenia

$$\forall n \geq N : \beta \geq \alpha - \frac{1}{n}.$$

Z Przykładu 3.1.2 ciąg stały jest zbieżny do swej wartości, a stąd i z Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach  $\alpha - \frac{1}{n} \rightarrow \alpha$ , więc przechodząc do granicy z Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej otrzymujemy  $\beta \geq \alpha$ . ■

### 3.4 Ciągi monotoniczne

Przypomnijmy Definicję 2.3.2 monotoniczności funkcji. Dla ciągów wystarczy sprawdzać mniej.

**Własność 3.4.1** Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Wtedy:

Ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty$  jest rosnący (odp. *niemalejący*), gdy  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n < a_{n+1}$  (odp.  $a_n \leq a_{n+1}$ ).

Ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty$  jest malejący (odp. *nierosnący*), gdy  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n > a_{n+1}$  (odp.  $a_n \geq a_{n+1}$ ).

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Przypomnijmy Lemat 3.3.6. Tam można uzyskać te odpowiednie ciągi monotoniczne (malejący  $(q_n)_{n=1}^\infty$  i rosnący  $(r_n)_{n=1}^\infty$ ) i analogicznie także monotoniczne ciągi liczb niewymiernych (por. zdanie pod Lematem 3.3.6) – ćwiczenie.

**Twierdzenie 3.4.2 (Kryterium zbieżności ciągów monotonicznych)**

Jeśli ciąg  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  jest niemalejący (odp. *nierosnący*) i ograniczony od góry (odp. *od dołu*), to jest zbieżny.

**Dowód:** Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  będzie niemalejący i ograniczony od góry. (Drugi przypadek: ćwiczenie).

Zbiór  $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$  jest niepusty i ograniczony od góry, zatem na mocy Aksjomatu Dedekinda (Twierdzenie 1.4.9) ma kres górny. Niech  $a = \sup A$ . Udowodnimy, że jest to granica ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji supremum liczba  $a - \varepsilon$  nie jest majorantą zbioru  $A$ , zatem istnieje element zbioru  $A$ , czyli taki wyraz  $a_N$  ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , że  $a_N > a - \varepsilon$ . Jeśli teraz  $n \geq N$ , to wobec monotoniczności ciągu mamy  $a_n \geq a_N$ , czyli z przechodniości nierówności  $a_n > a - \varepsilon$ .

Z drugiej strony z definicji supremum jest majorantą, zatem  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \leq a$ . Oczywiście zachodzi  $a < a + \varepsilon$ .

Pokazaliśmy, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq N : \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

■

Wykorzystamy to kryterium dla wyznaczenia liczby  $e$ .

**Przykład 3.4.3** Istnieje  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

**Dowód:** Niech  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Pokażemy, że ciąg  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jest rosnący i ograniczony od góry i skorzystamy z Kryterium zbieżności ciągów monotonicznych (Twierdzenia 3.4.2).

Ustalmy dowolne  $n \in \mathbb{N}^*$  i policzmy

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \stackrel{(1.2)}{\geq} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right)^n \\ &= 1 + \frac{(n+1)^2 - n(n+1) - n}{(n+1)^3} = 1 + \frac{1}{(n+1)^3} > 1, \end{aligned}$$

a to oznacza, że  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jest rosnący (por Własność 3.4.1).

Z drugiej strony dla dowolnego  $n \geq 2$  mamy

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{(1.4)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \\
 (3.2) \quad &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right).
 \end{aligned}$$

Niech teraz  $n \geq 4$ . Mamy

$$\begin{aligned}
 a_n &< \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{k!} \stackrel{(1.1)}{<} 2\frac{2}{3} + \sum_{k=4}^n \frac{1}{2^k} = \\
 &= 2\frac{2}{3} + \frac{1}{16} \sum_{k=0}^{n-4} \frac{1}{2^k} \stackrel{(1.5)}{=} 2\frac{2}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-3}}{1 - \frac{1}{2}} < 2\frac{2}{3} + \frac{1}{8} < 3.
 \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że ciąg jest ograniczony od góry. ■

$e$  nazywamy [liczbą Eulera](#).

**Twierdzenie 3.4.4 (Własności liczby Eulera)** Niech  $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Wtedy

1.  $s_n \rightarrow e \ (n \rightarrow \infty)$ ;
2.  $\forall n \geq 2 \ \exists t_n \in (0, 1) : \quad e = s_n + \frac{t_n}{n!n}$ ;
3.  $e \in (2, 3) \setminus \mathbb{Q}$ .

**Dowód:** 1. Niech  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ . Z (3.2) dla  $n \geq 2$  mamy

$$a_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

i stąd  $a_n < s_n$  dla  $n \geq 2$ . Ustalmy dowolne  $m \in \mathbb{N}^*$  oraz weźmy  $n \geq m$ . Wtedy

$$a_n \geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Jeśli teraz  $n \rightarrow \infty$ , to z Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach oraz Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej  $e \geq s_m$ .

Pokazaliśmy, że  $a_n < s_n \leq e$  dla  $n \geq 2$ , więc wystarczy zastosować Twierdzenie 3.3.4 o trzech ciągach.

Zauważmy jeszcze, że ciąg  $(s_n)_{n=1}^\infty$  jest rosnący, a stąd wynika, że  $s_n < e$ .

2. Ustalmy dowolne  $k \in \mathbb{N}^*$  oraz  $n \geq 2$  i policzmy

$$\begin{aligned} s_{n+k} - s_n &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{(n+j)!} = \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \sum_{j=2}^k \frac{1}{(n+2)\dots(n+j)} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left( 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(n+2)^j} \right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(n+2)^j} = \\ (1.5) \quad &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{n+2}\right)^k}{1 - \frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{1}{n!n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Jeśli  $n$  jest ustalone i  $k \rightarrow \infty$ , to z Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej

$$e - s_n \leq \frac{1}{n!n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

a pokazaliśmy w dowodzie punktu 1., że  $s_n < e$ , to znaczy  $e - s_n > 0$ . Stąd  $t_n := n!n(e - s_n) \in \left(0, \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right] \subset (0, 1)$ .

3. Pokazaliśmy w dowodzie Przykładu 3.4.3, że ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty$  jest rosnący, a mamy  $a_1 = 2$ , zatem  $e > 2$ . Pokazaliśmy tam również, że  $a_n < 2\frac{2}{3} + \frac{1}{8} = 2\frac{19}{24}$ , stąd wobec Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności  $e \leq 2\frac{19}{24} < 3$ . Czyli  $e \in (2, 3)$ , w szczególności  $e \notin \mathbb{Z}$ .

Założmy dla dowodu nie wprost, że  $e \in \mathbb{Q}$ , to znaczy muszą istnieć takie  $n, m \in \mathbb{N}^*$ , że  $n \geq 2$  i  $e = m/n$ . Wtedy z punktu 2

$$\frac{t_n}{n} = n!e - n!s_n = (n-1)!m - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = (n-1)!m - \sum_{k=0}^n (k+1)(k+2)\dots(n-1)n \in \mathbb{Z}$$

a to jest sprzeczność, bo lewa strona jest z przedziału  $(0, 1)$ . ■

Przedstawimy teraz ciągowe warunki: konieczny i wystarczający dla kresów zbiorów. Zaczniemy od przypadku kresu nie będącego elementem zbioru. Przypomnijmy, że majoranta jest elementem zbioru wtedy i tylko wtedy, gdy jest jego maksimum i jednocześnie jego kresem górnym. Symetrycznie minoranta zbioru jest jego elementem wtedy i tylko wtedy, gdy jest jego minimum i jego kresem dolnym.

**Twierdzenie 3.4.5 (O kresie nie będącym elementem zbioru)**

Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie niepustym zbiorem ograniczonym od góry (odp. *od dołu*) nie posiadającym maksimum (odp. *minimum*). Wtedy istnieje ciąg rosnący (odp. *malejący*) elementów zbioru  $A$  zbieżny do  $\sup A$  (odp.  $\inf A$ ).

**Dowód:** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie niepustym zbiorem ograniczonym od góry nie posiadającym maksimum (drugi przypadek – ćwiczenie). Na mocy Aksjomatu Dedekinda (Twierdzenie 1.4.9) istnieje  $a := \sup A \in \mathbb{R}$ .

Z definicji supremum liczba  $b_1 := a - 1$  nie jest majorantą zbioru  $A$ , zatem istnieje  $a_1 \in A$ , taki, że  $a - 1 < a_1 \leq a$ . Ponieważ  $A$  nie ma maksimum, więc  $\sup A \notin A$ , stąd  $a_1 < a$ . Niech  $b_2 := \max\{a_1, a - \frac{1}{2}\}$ . Mamy  $b_2 < a$ . Ale stąd znowu z definicji supremum  $b_2$  nie jest majorantą zbioru  $A$ , stąd istnieje takie  $a_2 \in A$ , że  $b_2 < a_2 \leq a$ . Ponownie korzystamy z faktu, że  $\sup A \notin A$  i otrzymujemy  $a_2 < a$ . Definiujemy  $b_3 := \max\{a_2, a - \frac{1}{3}\}$  i otrzymujemy taki element  $a_3$  zbioru  $A$ , że  $b_3 < a_3 < a$ . Tak postępując dalej otrzymujemy

$$b_1 < a_1 \leq b_2 < a_2 \leq b_3 < a_3 \leq b_4 < a_4 \leq \dots < a,$$

gdzie  $b_n := \max\{a_{n-1}, a - \frac{1}{n}\}$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ . W szczególności  $(a_n)_{n=1}^\infty$  jest rosnący i ograniczony od góry przez  $a$ , zatem zbieżny na mocy Kryterium zbieżności ciągów monotonicznych (Twierdzenie 3.4.2). Mamy także

$$a - \frac{1}{n} \leq b_n < a_n < a, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

zatem z Twierdzenia o trzech ciągach (Twierdzenie 3.3.4) wnioskujemy, że  $a_n \rightarrow a$ . ■

Założenie o nieistnieniu maksimum jest tu konieczne. Rozważmy na przykład zbiór  $A := [0, 1] \cup \{3\}$ . Mamy  $\sup A = \max A = 3$  i nie istnieje rosnący ciąg elementów zbioru  $A$  zbieżny do 3, bo gdyby istniał, to prawie wszystkie jego wyrazy (różne między sobą wobec silnej monotoniczności ciągu) byłyby w przedziale  $(2, 4)$ , a tam mamy tylko jeden element zbioru.

**Twierdzenie 3.4.6 (Ciągowy warunek konieczny i wystarczający kresu)**

Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie niepustym zbiorem ograniczonym od góry (odp. *od dołu*) oraz  $a \in \mathbb{R}$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

1.  $a = \sup A$  (odp.  $a = \inf A$ );
2.  $a$  jest majorantą (odp. *minorantą*) zbioru  $A$  oraz istnieje niemalejący (odp. *nie-rosnący*) ciąg elementów zbioru  $A$  zbieżny do  $a$ ;
3.  $a$  jest majorantą (odp. *minorantą*) zbioru  $A$  oraz istnieje ciąg elementów zbioru  $A$  zbieżny do  $a$ .

**Dowód:** Wykażemy przypadek zbioru ograniczonego od góry (drugi przypadek: ćwiczenie).

(1.  $\implies$  2.) Jeśli  $A$  nie ma maksimum, to teza wynika z Twierdzenia 3.4.5 o kresie nie będącym elementem ciągu. Jeśli  $A$  ma maksimum, to  $a = \sup A = \max A$  i można po prostu wziąć ciąg stały  $(a)_{n=1}^\infty$ .

(2.  $\implies$  3.) Oczywiste.

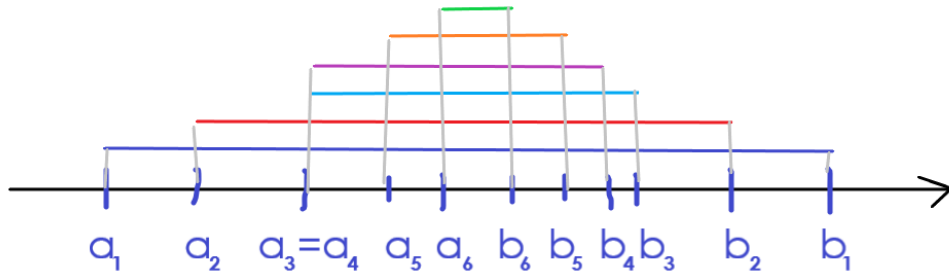
(3.  $\implies$  1.) Niech  $a$  będzie majorantą zbioru  $A$  i  $(c_n)_{n=1}^\infty$  będzie ciągiem wyrazów ze zbioru  $A$  zbieżnym do  $a$ . Chcemy pokazać, że  $a$  jest supremum, czyli że nie ma majoranty, która byłaby mniejsza od  $a$ .

Ustalmy dowolne  $c < a$ . Wtedy  $a - c > 0$ . Z definicji granicy wynika, że

$$\exists N \in \mathbb{N}^* : a - c_N < a - c,$$

zatem  $c_N > c$ , ale  $c_N \in A$ , stąd  $c$  nie jest majorantą zbioru  $A$ . Pokazaliśmy, że żadna majoranta zbioru  $A$  nie może być mniejsza od  $a$ . Stąd  $a = \sup A$ . ■

Na przykład  $\sup \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0$ , bo 0 jest majorantą tego zbioru oraz  $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$  na mocy Przykładu 3.1.2



**Lemat 3.4.7 (Zstępujący ciąg przedziałów domkniętych i ograniczonych)**

Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  będą takie, że

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n;$$

$$(ii) \quad b_n - a_n \rightarrow 0.$$

Wtedy  $\bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$  jest zbiorem jednoelementowym. Ponadto ciągi  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  są zbieżne do tego jedyne elementu.

**Dowód:** Mamy  $a_n \leq a_{n+1} < b_1$  oraz  $a_1 < b_{n+1} \leq b_n$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ale to oznacza, że ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty$  jest niemalejący i ograniczony od góry, a ciąg  $(b_n)_{n=1}^\infty$  jest nierosnący i

ograniczony od dołu. Na mocy Kryterium zbieżności ciągów monotonicznych (Twierdzenie 3.4.2) oba ciągi są zbieżne. Niech  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  i  $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Z Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach wynika, że  $b_n - a_n \rightarrow b - a$ . Zatem wobec założenia (ii) oraz Twierdzenia 3.1.3 o jedyności granicy mamy  $a = b$ . Z dowodu Kryterium zbieżności ciągów monotonicznych wynika, że  $a_n \leq a = b \leq b_n$ , zatem  $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ .

Założmy teraz, że  $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ . Mamy stąd  $a_n \leq c \leq b_n$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ . Z Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej w granicy wynika, że  $a \leq c \leq b = a$ , a stąd  $a = c$ . ■

### 3.5 Podciągi

Zacniemy od złożenia ciągów z funkcjami. Rozważmy ciąg  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ .

Możemy wziąć odwzorowanie  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  i utworzyć nowy ciąg  $(f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ , który jest złożeniem ciągu z funkcją. Np.  $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$  jest takim złożeniem funkcji sinus i ciągu o wyrazie ogólnym  $a_n = n$  (obłożeniem ciągu liczb naturalnych niezerowych funkcją sinus).

Ale możemy też wziąć odwzorowanie  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  i rozważyć ciąg  $(a_{\varphi(n)})_{n=1}^{\infty}$ . Jest to ciąg  $(b_n)_{n=1}^{\infty}$  o wzorze ogólnym  $b_n := a_{\varphi(n)}$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ . Takie właśnie złożenia będziemy teraz rozważać. Na przykład jeśli  $a_n = 1/n$  oraz  $\varphi(n) = 2^n$  otrzymujemy ciąg  $(2^{-n})_{n=1}^{\infty}$ .

**Twierdzenie 3.5.1 (O mieszaniu wyrazów ciągu)** *Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a_n \rightarrow a$  oraz niech  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  będzie injekcją. Wtedy  $a_{\varphi(n)} \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ).*

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Rozważmy zbiór  $A := \{k \in \mathbb{N}^* : \varphi(k) \leq N_1\}$ . Ponieważ  $\varphi$  jest injekcją, zbiór  $A$  jest skończony – ma dokładnie tyle elementów, ile  $\varphi$  przyjmuje wartości ze zbioru skończonego  $\{1, 2, \dots, N_1\}$ , zatem wobec różnowartościowości  $\varphi$  na pewno nie więcej niż  $N_1$ . Wobec tego  $N := 1 + \max A$  jest dobrze określone. Zauważmy, że jeśli  $n \geq N$ , to  $\varphi(n) > N_1$  z definicji liczby  $N$ , zatem mamy

$$\forall n \geq N : |a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon.$$

■

Założenie o injektywności jest konieczne. Jeśli np.  $\varphi : \mathbb{N}^* \ni n \mapsto 1 \in \mathbb{N}^*$ , to  $\frac{1}{\varphi(n)} \rightarrow 1$ , chociaż  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  (Przykład 3.1.2).

Szczególnym przypadkiem iniekcji  $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  jest **permutacja** zbioru liczb naturalnych niezerowych, czyli bijekcja (odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne). Powyższe twierdzenie mówi, że możemy poprzestawiać wszystkie wyrazy ciągu w inne miejsca, ale jeśli był on zbieżny, to nadal jest zbieżny i to do tej samej granicy.

**Twierdzenie 3.5.2** *Niech  $\mathbb{L} \subset \mathbb{N}^*$  będzie zbiorem nieskończonym. Wtedy istnieje bijekcja rosnąca  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{L}$  i jest ona jedyna.*

**Dowód:** Kładziemy

$$\begin{aligned}\varphi(1) &:= \min \mathbb{L}; \\ \varphi(2) &:= \min(\mathbb{L} \setminus \{\varphi(1)\}); \\ \varphi(3) &:= \min(\mathbb{L} \setminus \{\varphi(1), \varphi(2)\}); \\ &\vdots \\ \varphi(k+1) &:= \min(\mathbb{L} \setminus \{\varphi(j) : j \in \{1, \dots, k\}\}); \\ &\vdots\end{aligned}$$

Z Zasady minimum (Twierdzenie 1.1.1) wynika, że  $\varphi$  jest dobrze zdefiniowana (minima istnieją). Wprost z konstrukcji wynika po pierwsze:

$$\varphi(1) < \varphi(2) < \varphi(3) < \dots < \varphi(k) < \varphi(k+1) < \dots,$$

co oznacza, że  $\varphi$  jest rosnąca, a w szczególności jest iniekcją.

Po drugie natomiast  $\varphi(\mathbb{N}^*) = \mathbb{L}$ , bo jeśli  $m \in \mathbb{L}$ , to w  $\mathbb{L}$  istnieje co najwyżej  $m-1$  elementów mniejszych od niego, a to oznacza, że  $m$  będzie wartością w którymś z pierwszych  $m$  kroków.

Pokazaliśmy, że  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{L}$  jest bijekcją rosnącą.

Niech teraz  $\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{L}$  też będzie bijekcją rosnącą. Pokażemy z wykorzystaniem indukcji zupełnej (Twierdzenie 1.1.3), że  $\psi = \varphi$ .

I. Załóżmy najpierw, że  $\psi(1) \neq \varphi(1)$ . Stąd mamy  $\psi(1) > \min \mathbb{L}$ . Ponieważ  $\psi$  jest bijekcją, istnieje takie  $k > 1$ , że  $\psi(k) = \min \mathbb{L}$ , ale to jest sprzeczność z monotonicznością, bo wtedy  $\psi(k) < \psi(1)$ . Pokazaliśmy zatem, że  $\psi(1) = \varphi(1)$ .

II. Załóżmy teraz, że  $\psi(j) = \varphi(j)$  dla  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Z monotoniczności  $\psi(n+1) > \psi(j)$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Gdyby  $\psi(n+1) \neq \varphi(n+1)$ , to  $\psi(n+1) > \varphi(n+1) = \min(\mathbb{L} \setminus \{\psi(j) : j \in \{1, \dots, n\}\})$ . Ale znowu z bijektywności musi zatem istnieć takie  $k > n+1$ , że  $\psi(k) = \varphi(n+1)$ , a to znowu daje sprzeczność z monotonicznością. Pokazaliśmy więc, że  $\psi(n+1) = \varphi(n+1)$ .

Z Zasady indukcji zupełnej (Twierdzenie 1.1.3) wynika jedyność bijekcji z tezy. ■

W tym twierdzeniu pojawia się bijekcja, w poprzednim iniekcja  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ , ale zauważmy, że takie odwzorowanie jest także ciągiem liczb naturalnych. Można go zatem oznaczać przez  $(n_k)_{k=1}^\infty$ .

**Definicja 3.5.3 (Podciąg ciągu)** Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ , niech  $\mathbb{L} \subset \mathbb{N}^*$  będzie zbiorem nieskończonym oraz  $\varphi$  bijekcją rosnącą z poprzedniego twierdzenia. *Podciągiem* ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  wyznaczonym przez  $\mathbb{L}$  nazywamy ciąg  $(a_{\varphi(n)})_{n=1}^\infty$ , oznaczany symbolem  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}}$ .

Podciąg ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  można także zapisać symbolem  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ .

Przykłady podciągów ciągu  $(1/n)_{n=1}^\infty$ :  $(1/(2n+1))_{n=1}^\infty$ ,  $(1/n^2)_{n=1}^\infty$ ,  $(2^{-n})_{n=1}^\infty, \dots$

Niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}}$  będzie podciągiem ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ . Wtedy  $\mathbb{L}$  jest nieskończonym podzbiorem  $\mathbb{N}^*$ . Niech  $\mathbb{M}$  będzie nieskończonym podzbiorem  $\mathbb{L}$ , wtedy  $(a_n)_{n \in \mathbb{M}}$  jest podciągiem (pod)ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}}$ . Można także zapisać  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$  jest podciągiem ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , natomiast  $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^\infty$  jest podciągiem (pod)ciągu  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ . Ale zwróćmy też uwagę, że  $(a_n)_{n \in \mathbb{M}}$  (lub inaczej zapisany  $(a_{n_{k_j}})_{j=1}^\infty$ ) jest też podciągiem wyjściowego ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , to znaczy podciąg podciągu jest podciągiem.

Zauważmy jeszcze, jak wygląda zapis z definicji granicy dla podciągu: Podciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}}$  (ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ ) jest zbieżny do  $a$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{L} \forall n \in \mathbb{L} : n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Podciąg  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$  (ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ ) jest zbieżny do  $a$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall k \geq N : |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

**Twierdzenie 3.5.4 (O granicy podciągu)** Jeżeli ciąg jest zbieżny, to każdy jego podciąg jest zbieżny do tej samej granicy.

**Dowód:** To wynika wprost z definicji podciągu (w której wykorzystane jest Twierdzenie 3.5.2) i Twierdzenia 3.5.1 o mieszanii wyrazów. ■

Zwróćmy uwagę, że rozbieżny ciąg może mieć podciągi zbieżne. Ciąg  $((-1)^n)_{n=1}^\infty$  jest rozbieżny (Przykład 3.1.4), ale ma dwa podciągi stałe, bo  $(-1)^{2n} = 1$  (czyli podciąg  $((-1)^n)_{n \in 2\mathbb{N}^*}$  jest stały o wartości 1) oraz  $(-1)^{2n+1} = -1$ , więc zbieżne (Przykład 3.1.2).

**Twierdzenie 3.5.5 (Cauchy'ego o podciągach)** <sup>10</sup> Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ . Jeśli z każdego podciągu ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  da się wybrać podciąg zbieżny do  $a$ , to  $a_n \rightarrow a$ .

**Dowód:** Dla dowodu nie wprost założmy, że  $a$  nie jest granicą ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ . Z definicji granicy ciągu to oznacza, że

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall N \in \mathbb{N}^* \exists n \geq N : |a_n - a| \geq \varepsilon_0.$$

<sup>10</sup>Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matematyk francuski

Niech  $\mathbb{L} := \{n \in \mathbb{N}^* : |a_n - a| \geq \varepsilon_0\}$ . Z powyższej linii wynika, że  $\mathbb{L}$  jest nieskończony. Rozważmy podciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}}$ . Z założenia twierdzenia istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do  $a$ , to znaczy istnieje taki podzbiór nieskończony  $\mathbb{M}$  zbioru  $\mathbb{L}$ , że podciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{M}}$  jest zbieżny do  $a$ , czyli w szczególności z definicji granicy wynika, że

$$\exists M \in \mathbb{M} : |a_M - a| < \varepsilon_0,$$

a to jest sprzeczność, bo  $M \in \mathbb{M} \subset \mathbb{L}$ . ■

**Wniosek 3.5.6 (O rozkładzie zupełnym na podciągi)** *Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Niech  $\mathbb{N}^* = \mathbb{L}_1 \cup \dots \cup \mathbb{L}_k$  i  $\forall j \in \{1, \dots, k\} : \mathbb{L}_j$  będzie nieskończony. Jeśli  $\forall j \in \{1, \dots, k\} : (a_n)_{n \in \mathbb{L}_j}$  jest zbieżny do  $a$ , to  $a_n \rightarrow a$ .*

**Dowód:** Ustalmy dowolny podciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{M}}$  ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  (w szczególności  $\mathbb{M} \subset \mathbb{N}^*$  jest nieskończony). Ponieważ  $\mathbb{M} = \bigcup_{j=1}^k (\mathbb{L}_j \cap \mathbb{M})$ , więc przynajmniej jeden ze zbiorów  $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{M}, \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{M}, \dots, \mathbb{L}_k \cap \mathbb{M}$  jest nieskończony, skoro  $\mathbb{M}$  jest nieskończony.

Niech  $j \in \{1, \dots, k\}$  będzie taki, że  $\mathbb{L}_j \cap \mathbb{M}$  jest nieskończony. Ciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}_j \cap \mathbb{M}}$  jest podciągiem ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}_j}$  zbieżnego do  $a$  na mocy założenia, zatem jest zbieżny do  $a$  na mocy Twierdzenia 3.5.4 o granicy podciągu.

Teza wynika z dowolności wybranego podciągu i z Twierdzenia 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach. ■

Będziemy teraz chcieli zająć się ważną własnością ciągów ograniczonych. Najpierw zrobimy to dla ciągów rzeczywistych.

**Twierdzenie 3.5.7 (Bolzana-Weierstrassa)** <sup>11</sup>

*Z każdego ograniczonego ciągu rzeczywistego da się wybrać podciąg zbieżny.*

**Dowód:** Ustalmy dowolny ciąg ograniczony  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Niech  $a, b \in \mathbb{R}$  będą takie, że  $a < b$  oraz  $\forall n \in \mathbb{N}^* : x_n \in [a, b]$ . Rekurencyjnie konstruujemy dwa ciągi rzeczywiste  $(a_n)_{n=1}^\infty$ ,  $(b_n)_{n=1}^\infty$  oraz ciąg  $(\mathbb{L}_n)_{n=1}^\infty$  nieskończonych podzbiorów zbioru  $\mathbb{N}^*$  tak, by dla każdego  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  były spełnione następujące warunki:

1.  $a \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq b$ ;
2.  $b_n - a_n = 2^{-(n-1)}(b - a)$ ;
3.  $\mathbb{L}_n \subset \mathbb{L}_{n-1}$  jest nieskończony;

---

<sup>11</sup>Bernard Bolzano (1781-1848), matematyk i teolog czeski; Karl Weierstraß (1815-1897), matematyk niemiecki

$$4. j \in \mathbb{L}_n \implies x_j \in [a_n, b_n].$$

Warunek 2 i 4 mają być też spełnione dla  $n = 1$ .

Konstrukcja:

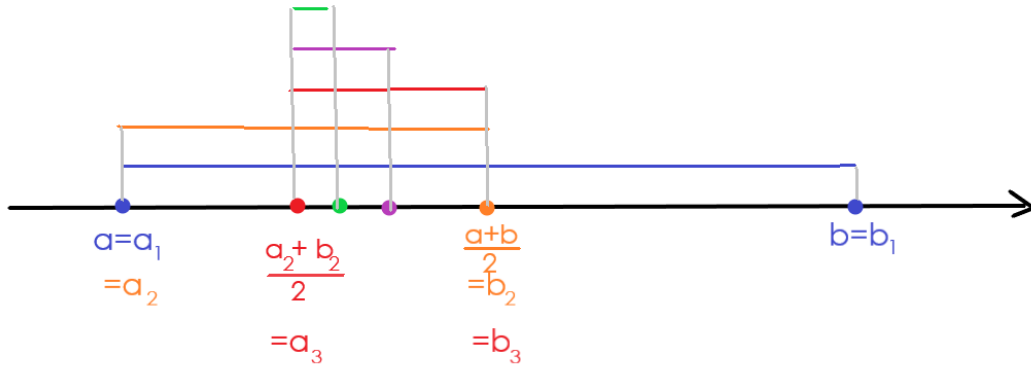
$n = 1$ : Kładziemy  $a_1 := a, b_1 := b, \mathbb{L}_1 := \mathbb{N}^*$ . Mamy  $b_1 - a_1 = b - a$ .

$n = 2$ : Niech

$$\mathbb{L}_2^l := \left\{ n \in \mathbb{N}^* : x_n \in \left[ a, \frac{a+b}{2} \right] \right\}; \quad \mathbb{L}_2^p := \left\{ n \in \mathbb{N}^* : x_n \in \left[ \frac{a+b}{2}, b \right] \right\}.$$

Ponieważ  $\mathbb{L}_2^l \cup \mathbb{L}_2^p = \mathbb{N}^*$ , przynajmniej jeden z tych zbiorów musi być nieskończony.

Jeśli  $\mathbb{L}_2^l$  jest nieskończony, kładziemy  $\mathbb{L}_2 := \mathbb{L}_2^l, a_2 := a, b_2 := (a+b)/2$ . Jeśli  $\mathbb{L}_2^l$  jest skończony, kładziemy  $\mathbb{L}_2 := \mathbb{L}_2^p, a_2 := (a+b)/2, b_2 := b$ . Zauważmy, że  $b_2 - a_2 = (b-a)/2$ .



$n = 3$ : Niech

$$\mathbb{L}_3^l := \left\{ n \in \mathbb{L}_2 : x_n \in \left[ a_2, \frac{a_2 + b_2}{2} \right] \right\}; \quad \mathbb{L}_3^p := \left\{ n \in \mathbb{L}_2 : x_n \in \left[ \frac{a_2 + b_2}{2}, b_2 \right] \right\}.$$

Ponieważ  $\mathbb{L}_3^l \cup \mathbb{L}_3^p = \mathbb{L}_2$ , przynajmniej jeden z tych zbiorów musi być nieskończony.

Jeśli  $\mathbb{L}_3^l$  jest nieskończony, kładziemy  $\mathbb{L}_3 := \mathbb{L}_3^l, a_3 := a_2, b_3 := (a_2 + b_2)/2$ . Jeśli  $\mathbb{L}_3^l$  jest skończony, kładziemy  $\mathbb{L}_3 := \mathbb{L}_3^p, a_3 := (a_2 + b_2)/2, b_3 := b_2$ . Zauważmy, że  $b_3 - a_3 = (b_2 - a_2)/2 = (b-a)/4$ .

$n = k+1$ : Mamy już  $a_k, b_k, \mathbb{L}_k$  takie, że spełnione są warunki 1-4 dla  $n = k$ . Niech

$$\mathbb{L}_{k+1}^l := \left\{ n \in \mathbb{L}_k : x_n \in \left[ a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \right] \right\}; \quad \mathbb{L}_{k+1}^p := \left\{ n \in \mathbb{L}_k : x_n \in \left[ \frac{a_k + b_k}{2}, b_k \right] \right\}.$$

Ponieważ  $\mathbb{L}_{k+1}^l \cup \mathbb{L}_{k+1}^p = \mathbb{L}_k$ , przynajmniej jeden z tych zbiorów musi być nieskończony.

Jeśli  $\mathbb{L}_{k+1}^l$  jest nieskończony, kładziemy

$$\mathbb{L}_{k+1} := \mathbb{L}_{k+1}^l, \quad a_{k+1} := a_k, \quad b_{k+1} := (a_k + b_k)/2.$$

Jeśli  $\mathbb{L}_{k+1}^l$  jest skończony, kładziemy

$$\mathbb{L}_{k+1} := \mathbb{L}_{k+1}^p, \quad a_{k+1} := (a_k + b_k)/2, \quad b_{k+1} := b_k.$$

Zauważmy, że  $b_{k+1} - a_{k+1} = (b_k - a_k)/2 = (b - a)/2^k$ .

Wobec rekurencji zakończyliśmy konstrukcję ciągów spełniających punkty 1-4.

Z Lematu 3.4.7 i warunków 1-2 wynika, że ciągi  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty$  są zbieżne do tej samej granicy  $g$ .

Konstruujemy zbiór  $\mathbb{L} := \{n_1, n_2, \dots\}$  korzystając z Zasady minimum (Twierdzenie 1.1.1) i kładąc:

$$\begin{aligned} n_1 &:= 1 = \min \mathbb{L}_1 = \min \mathbb{N}^*, \\ n_2 &:= \min (\mathbb{L}_2 \setminus \{n_1\}), \\ n_3 &:= \min (\mathbb{L}_3 \setminus \{n_1, n_2\}), \\ &\vdots \\ n_{k+1} &:= \min (\mathbb{L}_{k+1} \setminus \{n_j : j \in \{1, 2, \dots, k\}\}), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $\forall s \in \mathbb{N}^* : n_s \in \mathbb{L}_s$ , a stąd z warunku 4 mamy  $x_{n_s} \in [a_s, b_s]$ , inaczej mówiąc  $a_s \leq x_{n_s} \leq b_s$ . Ponieważ  $a_s \rightarrow g$  ( $s \rightarrow \infty$ ) oraz  $b_s \rightarrow g$  ( $s \rightarrow \infty$ ), zatem z Twierdzenia o trzech ciągach (Twierdzenie 3.3.4) wynika, że  $x_{n_s} \rightarrow g$  ( $s \rightarrow \infty$ ). ■

### Wniosek 3.5.8 (Odpowiednik Twierdzenia Bolzana-Weierstrassa w $\mathbb{C}$ )

*Z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych da się wybrać podciąg zbieżny.*

**Dowód:** Ustalmy dowolny ciąg ograniczony  $(z_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ . Niech  $R > 0$  będzie takie, że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : z_n \in K(0, R)$ . To znaczy  $|z_n| < R$ , a z własności modułu mamy także  $|\operatorname{Re} z_n| < R$  i  $|\operatorname{Im} z_n| < R$  dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Na mocy Twierdzenia 3.5.7 Bolzana-Weierstrassa istnieje podciąg  $\operatorname{Re} z_{n_k} \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Mamy  $\forall k \in \mathbb{N}^* : |\operatorname{Im} z_{n_k}| < R$ , zatem jeszcze raz stosując Twierdzenie 3.5.7 Bolzana-Weierstrassa otrzymujemy podciąg  $\operatorname{Im} z_{n_{k_j}} \rightarrow b$  ( $j \rightarrow \infty$ ).

Z Twierdzenia 3.5.4 o granicy podciągu ciągu zbieżnego wynika, że  $\operatorname{Re} z_{n_{k_j}} \rightarrow a$  ( $j \rightarrow \infty$ ). Wystarczy teraz zastosować Własność 3.1.5 do ciągu  $(z_{n_{k_j}})_{j=1}^\infty$  i  $z = a + ib$ . ■

### 3.6 Ciągi Cauchy'ego

**Definicja 3.6.1 (Ciąg Cauchy'ego)** Mówimy, że  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  jest *ciągami Cauchy'ego*, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

**Własność 3.6.2** Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

**Dowód:** Niech  $a_n \rightarrow a$ . Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weźmy teraz  $n \geq N$  i  $m \geq N$ . Z nierówności trójkąta dla modułu

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

**Lemat 3.6.3** Jeśli ciąg Cauchy'ego ma podciąg zbieżny, to jest zbieżny.

**Dowód:** Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  będzie ciągiem Cauchy'ego oraz niech  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}}$  będzie jego podciągiem zbieżnym do  $a$ . Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Wtedy z definicji ciągu Cauchy'ego i definicji granicy

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N_1 : |a_n - a_m| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \exists N_2 \in \mathbb{L} \forall k \in \mathbb{L} : k \geq N_2 &\implies |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

$\mathbb{L}$  jest nieskończony, zatem

$$\exists N \in \mathbb{L} : N > N_1 \quad \text{ i } \quad N > N_2.$$

Niech teraz  $n \geq N$ . Z nierówności trójkąta dla modułu i powyższych nierówności

$$|a_n - a| = |(a_n - a_N) + (a_N - a)| \leq |a_n - a_N| + |a_N - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

**Lemat 3.6.4** Każdy ciąg Cauchy'ego jest ograniczony.

**Dowód:** Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  będzie ciągiem Cauchy'ego. Wprost z definicji

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1.$$

Zatem  $|a_n| < 1 + |a_N|$  dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$  (por. Własność 3.1.9).

■

**Twierdzenie 3.6.5 (O zespolonych ciągach Cauchy'ego)**

*Ciąg liczb zespolonych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągiem Cauchy'ego.*

**Dowód:** Jeśli ciąg jest zbieżny, to jest ciągiem Cauchy'ego na mocy Własności 3.6.2.

Założmy teraz, że  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jest ciągiem Cauchy'ego. Na mocy Lematu 3.6.4 jest on ograniczony. Stąd na mocy Wniosku 3.5.8 ma on podciąg zbieżny. Wystarczy teraz zastosować Lemat 3.6.3. ■

Jeśli rozważymy ciąg Cauchy'ego o wyrazach wymiernych, to na podstawie powyższego twierdzenia jest on zbieżny i to w  $\mathbb{R}$  (Wniosek 3.1.6), ale jego granica nie musi być wymierna. Przykładem jest tu ciąg  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$  (por. Przykład 3.4.3 i Twierdzenie 3.4.4). Co więcej w Lemacie 3.3.6 pokazaliśmy, że każda liczba rzeczywista jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych.

Informacja o [konstrukcji Cantora](#) (zbioru) liczb rzeczywistych: <sup>12</sup>

Wracamy do sytuacji, w której mamy tylko liczby wymierne. Definiujemy ciągi Cauchy'ego:  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$  jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

$$\varepsilon \in \mathbb{Q}$$

Rozważamy

$$\mathcal{C} := \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q} : (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ jest ciągiem Cauchy'ego}\}$$

oraz relację

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \sim (b_n)_{n=1}^{\infty} : \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \quad |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

$$\varepsilon \in \mathbb{Q}$$

Pokazujemy, że  $\sim$  jest relacją równoważności zgodną z dodawaniem i mnożeniem i definiujemy

$$\mathbb{R} := \mathcal{C} / \sim.$$

Chcemy, żeby  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Otrzymamy tę zależność, jeśli liczbę wymierną  $q$  utożsamimy z klasą abstrakcji ciągu stałego  $(q)_{n=1}^{\infty}$ .

---

<sup>12</sup>Georg Cantor (1845-1918), matematyk niemiecki

### 3.7 Granice niewłaściwe – suma

W tym podrozdziale rozważamy tylko ciągi rzeczywiste.

**Definicja 3.7.1 (Granice niewłaściwe)** Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ .

Piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  albo  $a_n \rightarrow +\infty$ , jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \quad a_n > M.$$

Mówimy wtedy, że ciąg ten *dąży do plus nieskończoności*.

Piszemy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  albo  $a_n \rightarrow -\infty$ , jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \quad a_n < M.$$

Mówimy wtedy, że ciąg ten *dąży do minus nieskończoności*.

**Przykład 3.7.2**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ .

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $M \in \mathbb{R}$ . Na mocy Zasady Archimedes (Twierdzenie 1.4.4) istnieje takie  $N \in \mathbb{N}^*$ , że  $N > M$ , ale wtedy z przechodniości nierówności  $\forall n \geq N : n > M$ . ■

**Twierdzenie 3.7.3 (Własności granic niewłaściwych)**

Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ . Wtedy:

- (i)  $a_n \rightarrow +\infty \iff -a_n \rightarrow -\infty$ .
- (ii) Dowolny podciąg ciągu dążącego do plus (odp. *minus*) nieskończoności, dąży do plus (odp. *minus*) nieskończoności.
- (iii) Jeśli  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jest niemalejący (odp. *nierosnący*) i nie jest ograniczony od góry (odp. *od dołu*), to  $a_n \rightarrow +\infty$  (odp.  $a_n \rightarrow -\infty$ ).
- (iv) Jeśli  $a_n \rightarrow +\infty$  (odp.  $-\infty$ ), to  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jest ograniczony od dołu (odp. *od góry*).

**Dowód:** (i) To wynika wprost z równoważności  $a_n > M \iff -a_n < -M$ .

(ii) Załóżmy, że  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  oraz  $\mathbb{L} \subset \mathbb{N}^*$  jest nieskończony. Ustalmy dowolne  $M \in \mathbb{R}$ . Z definicji granicy niewłaściwej

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : \quad a_n > M.$$

Ponieważ  $\mathbb{L}$  jest nieskończony, zatem istnieje takie  $N \in \mathbb{L}$ , że  $N \geq N_1$ . Ale wtedy jeśli tylko  $n \geq N$  i  $n \in \mathbb{L}$ , to  $a_n > M$ .

(iii) Ustalmy dowolne  $M \in \mathbb{R}$ . Ponieważ  $(a_n)_{n=1}^\infty$  nie jest ograniczony od góry, zatem istnieje takie  $N \in \mathbb{N}^*$ , że  $a_N > M$ . Ale wobec monotoniczności stąd

$$\forall n \geq N : \quad a_n > M.$$

(iv) Jeśli  $a_n \rightarrow +\infty$ , to prawie wszystkie wyrazy ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  są większe od 1 i wystarczy zastosować Własność 3.1.9. ■

### **Własność 3.7.4 (Odpowiednik twierdzenia Cauchy'ego o podciągach)**

Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \{-\infty, +\infty\}$ . Jeśli z każdego podciągu ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  da się wybrać podciąg dążący do  $a$ , to  $a_n \rightarrow a$ .

**Dowód:** ćwiczenie. ■

**Lemat 3.7.5** Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $(m_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}^*$ .

Jeśli  $a_n \rightarrow a$  i  $m_n \rightarrow +\infty$ , to  $a_{m_n} \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Dowód:** Niech  $b_n := a_{m_n}$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ , i ustalmy dowolny podciąg  $(b_{n_k})_{k=1}^\infty$  ciągu  $(b_n)_{n=1}^\infty$ . Mamy  $m_{n_k} \rightarrow +\infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ) na mocy Własności granic niewłaściwych (Twierdzenie 3.7.3(ii)).

Niech teraz

$$\begin{aligned} k_1 &= 1, \\ k_2 &= \min\{k \in \mathbb{N}^* : m_{n_k} > m_{n_{k_1}}\}, \\ k_3 &= \min\{k > k_2 : m_{n_k} > m_{n_{k_2}}\}, \\ &\vdots \\ k_{j+1} &= \min\{k > k_j : m_{n_k} > m_{n_{k_j}}\}, \quad j \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Te wszystkie zbiory są niepuste (ponieważ  $m_{n_k} \rightarrow +\infty$  ( $k \rightarrow \infty$ )), więc minima istnieją (Zasada minimum 1.1.1). Zauważmy, że podciąg  $(m_{n_{k_j}})_{j=1}^\infty$  jest rosnący. Stąd  $(b_{n_{k_j}})_{j=1}^\infty$  jest podciągiem  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , zatem dąży do  $a$  na mocy Twierdzenia 3.5.4 o granicy podciągu ciągu zbieżnego, jeśli  $a \in \mathbb{R}$ , albo Twierdzenia 3.7.3 (ii), jeśli  $a \in \{-\infty, +\infty\}$ .

Z dowolności wyboru tego podciągu Twierdzenie 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach albo jego odpowiednik Własność 3.7.4 daje  $b_n \rightarrow a$ . ■

### **Twierdzenie 3.7.6 (O odpychaniu do nieskończoności)**

Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  będą takie, że  $a_n \leq b_n$  dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ . Wtedy:

(i) Jeśli  $a_n \rightarrow +\infty$ , to  $b_n \rightarrow +\infty$ .

(ii) Jeśli  $b_n \rightarrow -\infty$ , to  $a_n \rightarrow -\infty$ .

**Dowód:** Z założenia

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : \quad a_n \leq b_n.$$

(i) Ustalmy dowolne  $M \in \mathbb{R}$ . Ponieważ  $a_n \rightarrow +\infty$ , to

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_2 : \quad a_n > M.$$

Niech  $N := N_1 + N_2$ . Wtedy dla  $n \geq N$  mamy  $a_n > M$  i  $b_n \geq a_n$ . Z przechodniości porządku  $b_n > M$ .

(ii) Wystarczy skorzystać z (i) oraz z Własności granic niewłaściwych (Twierdzenie 3.7.3 (i)). ■

### Wniosek 3.7.7 (Uogólnienie Twierdzenia o trzech ciągach)

Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty, (c_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  oraz  $g \in \bar{\mathbb{R}}$ . Jeśli  $a_n \leq b_n \leq c_n$  dla prawie wszystkich  $n$  oraz  $a_n \rightarrow g$  i  $c_n \rightarrow g$ , to  $b_n \rightarrow g$ .

**Dowód:** Jeśli  $g \in \mathbb{R}$ , to korzystamy z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach, jeśli  $g \in \{-\infty, +\infty\}$ , to z Twierdzenia 3.7.6 o odpychaniu do nieskończoności. ■

### Twierdzenie 3.7.8 (Odpowiednik twierdzenia o sumie)

Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Jeśli  $a_n \rightarrow +\infty$  (odp.  $-\infty$ ) i  $(b_n)_{n=1}^\infty$  jest ograniczony od dołu (odp. *górną*), to  $a_n + b_n \rightarrow +\infty$  (odp.  $-\infty$ ).

**Dowód:** Ciąg  $(b_n)_{n=1}^\infty$  jest ograniczony od dołu, zatem istnieje takie  $b \in \mathbb{R}$ , że  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  mamy  $b_n \geq b$ . Ustalmy dowolne  $M \in \mathbb{R}$ . Z definicji granicy niewłaściwej

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \quad a_n > M - b.$$

Stąd dla  $n \geq N$  mamy  $a_n + b_n > M - b + b = M$ . ■

**Wniosek 3.7.9** Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$ . Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$ .

**Dowód:** Pokażemy pierwszą tezę (druga – ćwiczenie)

Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{R}$ , to  $(b_n)_{n=1}^\infty$  jest ograniczony (Twierdzenie 3.1.8), więc także ograniczony od dołu. Jeśli  $b_n \rightarrow +\infty$ , to też jest ograniczony od dołu (Twierdzenie 3.7.3(iv)). Teza wynika z Twierdzenia 3.7.8. ■

Co się dzieje z sumą, gdy jeden ciąg dąży do plus, a drugi do minus nieskończoności? Jest to tak zwany symbol nieoznaczony  $[\infty - \infty]$ . Możemy otrzymać wszystko, także ciąg rozbieżny. Np.  $n \rightarrow +\infty$  (Przykład 3.7.2) i  $-n + (-1)^n \rightarrow -\infty$  (można to wprost pokazać z definicji, ale wynika to też z Przykładu 3.7.2 oraz Twierdzeń 3.7.3(i) i 3.7.8), a sumą ciągów  $(n)_{n=1}^{\infty}$  i  $(-n + (-1)^n)_{n=1}^{\infty}$  jest ciąg rozbieżny  $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$  (Przykład 3.1.4).

Ćwiczenie: Wskazać przykłady takich ciągów  $a_n \rightarrow +\infty$  i  $b_n \rightarrow -\infty$ , że ich suma dąży do a)  $-\infty$ ; b)  $-3$ ; c)  $0$ ; d)  $1$ ; e)  $+\infty$ .

### 3.8 Granice niewłaściwe – iloczyn i iloraz

#### Twierdzenie 3.8.1 (Odpowiednik twierdzenia o iloczynie)

Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ .

1. Jeśli  $a_n \rightarrow +\infty$  i  $b_n \geq b > 0$  (odp.  $b_n \leq b < 0$ ) dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ , to  $a_n b_n \rightarrow +\infty$  (odp.  $-\infty$ ).
2. Jeśli  $a_n \rightarrow -\infty$  i  $b_n \geq b > 0$  (odp.  $b_n \leq b < 0$ ) dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ , to  $a_n b_n \rightarrow -\infty$  (odp.  $+\infty$ ).

**Dowód:** 1. Zrobimy tylko jeden przypadek z  $b > 0$  (drugi jest symetryczny – ćwiczenie). Z założenia

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : \quad b_n \geq b.$$

Ustalmy dowolne  $M \in \mathbb{R}$ . Z definicji granicy niewłaściwej wynika, że

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_2 : \quad a_n > \max \left\{ \frac{M}{b}, 0 \right\}.$$

Wtedy dla dowolnego  $n \geq N_1 + N_2$  mamy  $a_n b_n \geq a_n b > M$ .

2. ćwiczenie. ■

**Wniosek 3.8.2** Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ .

1. Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$  (odp.  $(-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$ ), to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = +\infty$  (odp.  $-\infty$ ).
2. Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}$  (odp.  $(-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$ ), to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$  (odp.  $+\infty$ ).

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Tu otrzymujemy kolejny symbol nieoznaczony, mianowicie  $[0 \cdot \infty]$ . Otóż jeśli jeden z ciągów jest zbieżny do 0, a drugi dąży do którejś nieskończoności, to ich iloczyn może znowu być wszystkim. Np.  $n \rightarrow +\infty$ ,  $(-1)^n/n \rightarrow 0$ , a ich iloczyn to ciąg rozbieżny  $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ .

Ćwiczenie: Wskazać przykłady takich ciągów  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ , że  $a_n \rightarrow +\infty$  i  $b_n \rightarrow 0$ , natomiast ich iloczyn dąży do a)  $-\infty$ ; b)  $-3$ ; c)  $0$ ; d)  $1$ ; e)  $+\infty$ .

**Twierdzenie 3.8.3 (O odwracaniu nieskończoności)** *Niech  $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .*

(i) *Jeśli  $b_n \rightarrow +\infty$  lub  $b_n \rightarrow -\infty$ , to  $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$ .*

(ii) *Jeśli  $b_n \rightarrow 0$  i  $b_n > 0$  (odp.  $b_n < 0$ ) dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ , to  $\frac{1}{b_n} \rightarrow +\infty$  (odp.  $-\infty$ ).*

**Dowód:** (i) Pokażemy przypadek  $+\infty$  (drugi jest symetryczny – ćwiczenie). Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy niewłaściwej

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : b_n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zauważmy, że w szczególności  $b_n > 0$  dla  $n \geq N$ , a wobec tego  $\left| \frac{1}{b_n} - 0 \right| = \frac{1}{b_n}$ . Z powyższego zdania zatem wynika

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \left| \frac{1}{b_n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

(ii) Z założenia

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : b_n > 0.$$

Ustalmy dowolne  $M \in \mathbb{R}$ . Jeśli  $M \leq 0$ , to  $\forall n \geq N_1 : \frac{1}{b_n} > 0 \geq M$ . Jeśli natomiast  $M > 0$ , to z definicji granicy ciągu

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_2 + N_1 : b_n = |b_n - 0| < \frac{1}{M},$$

ale stąd  $\frac{1}{b_n} > M$  dla takich  $n$ . ■

Zauważmy, że to założenie o znaku jest konieczne. Mianowicie łatwo sprawdzić, że  $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$  (Przykład 3.1.2 + Twierdzenie 3.3.4 o trzech ciągach), natomiast ciąg odwrotności  $((-1)^n n)_{n=1}^{\infty}$  nie ma granicy nawet niewłaściwej (ćwiczenie).

**Wniosek 3.8.4 (Odpowiednik twierdzenia o ilorazie)**

*Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$  oraz  $a_n \rightarrow \alpha$  i  $b_n \rightarrow \beta$ . Wtedy*  

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$$

- $\frac{\alpha}{\beta}$ , gdy  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- 0, gdy  $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \{-\infty, +\infty\}$ ;
- $+\infty$ , gdy zachodzi jeden z warunków
  1.  $\alpha = +\infty, \beta \in (0, +\infty)$ ,
  2.  $\alpha = -\infty, \beta \in (-\infty, 0)$ ,
  3.  $\alpha \in (0, +\infty], \beta = 0, b_n > 0$  dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ ,
  4.  $\alpha \in [-\infty, 0), \beta = 0, b_n < 0$  dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ ;
- $-\infty$ , gdy zachodzi jeden z warunków
  1.  $\alpha = -\infty, \beta \in (0, +\infty)$ ,
  2.  $\alpha = +\infty, \beta \in (-\infty, 0)$ ,
  3.  $\alpha \in (0, +\infty], \beta = 0, b_n < 0$  dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ ,
  4.  $\alpha \in [-\infty, 0), \beta = 0, b_n > 0$  dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Dowód:** Twierdzenia 3.2.7 i 3.8.3 oraz Wniosek 3.8.2. ■

W pozostałych przypadkach ta granica z tezy może nie istnieć, albo być czymkolwiek. Otrzymujemy tu zatem dwa kolejne symbole nieoznaczone  $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ . Na przykład granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n/n}{1/n}$  nie istnieje.

Ćwiczenie: Wskazać przykłady takich ciągów  $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ , że  $a_n \rightarrow \alpha$  i  $b_n \rightarrow \beta$ , gdzie  $\alpha, \beta \in \{0\}$  lub  $\alpha, \beta \in \{-\infty, \infty\}$ , natomiast ich iloraz dąży do a)  $-\infty$ ; b)  $-3$ ; c) 0; d) 1; e)  $+\infty$ .

**Własność 3.8.5** Z każdego ciągu rzeczywistego da się wybrać podciąg dążący do granicy skończonej lub do granicy niewłaściwej.

**Dowód:** Jeśli ciąg  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  jest ograniczony, to istnieje jego podciąg zbieżny do granicy skończonej na mocy Twierdzenia 3.5.7 Bolzana-Weierstrassa.

Założmy teraz, że ciąg  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  nie jest ograniczony od góry. Z tego wynika, że istnieje takie  $n_1 \in \mathbb{N}^*$ , że  $a_{n_1} > 1$ . Z nieograniczoności od góry znowu istnieje takie  $n_2 \in \mathbb{N}^*$ , że  $n_2 > n_1$  oraz  $a_{n_2} > 2$ . Kiedy mamy już  $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$ , znajdujemy  $n_{k+1} > n_k$  taki, że  $a_{n_{k+1}} > k + 1$ .

Z konstrukcji wynika, że  $\forall k \in \mathbb{N}^* : a_{n_k} > k$ , zatem z Twierdzenia 3.7.6 o odpychaniu do nieskończoności i Przykładu 3.7.2 wnioskujemy, że  $a_{n_k} \rightarrow +\infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

Przypadek ciągu, który nie jest ograniczony od dołu jest symetryczny (ćwiczenie). ■

**Twierdzenie 3.8.6 (Stolza)**<sup>13</sup> Niech  $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , niech ciąg  $(y_n)_{n=1}^\infty$  będzie rosnący oraz niech  $g \in \mathbb{R}$ . Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = g$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = g$ .

**Dowód:**  $y_n \rightarrow +\infty$ , zatem z definicji granicy niewłaściwej

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : \quad y_n > 0$$

a stąd i z monotoniczności jeśli  $n > k \geq N_1$ , to  $\frac{y_k}{y_n} \in (0, 1)$ , w szczególności

$$(3.3) \quad \forall n > k \geq N_1 : \quad 1 - \frac{y_k}{y_n} \in (0, 1).$$

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy ciągu

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall l \geq N_2 : \quad \frac{x_{l+1} - x_l}{y_{l+1} - y_l} \in \left(g - \frac{\varepsilon}{2}, g + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Położmy  $k := N_1 + N_2$  i weźmy dowolne  $n > k$ . Mamy wtedy (podstawiając kolejno za  $l$  liczby  $k, k+1, \dots, n-2, n-1$ ):

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k}, \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{y_{k+2} - y_{k+1}}, \dots, \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}, \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \in \left(g - \frac{\varepsilon}{2}, g + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Ponieważ ciąg  $(y_n)_{n=1}^\infty$  jest rosnący, zatem mianowniki tych ułamków są dodatnie. Dla ustalonego  $n$  stosujemy do tych ułamków Lemat 1.5.1 o ułamkach Fareya otrzymując

$$(3.4) \quad \forall n > k : \quad \frac{x_n - x_k}{y_n - y_k} \in \left(g - \frac{\varepsilon}{2}, g + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Policzmy teraz

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} - g &= \frac{x_n - gy_n}{y_n} = \frac{x_n - x_k + x_k - gy_k + gy_k - gy_n}{y_n} = \\ &= \frac{x_k - gy_k}{y_n} + \frac{x_n - x_k - g(y_n - y_k)}{y_n} = \\ &= \frac{x_k - gy_k}{y_n} + \frac{y_n - y_k}{y_n} \left( \frac{x_n - x_k}{y_n - y_k} - g \right). \end{aligned}$$

Z nierówności trójkąta dla modułu

$$(3.5) \quad \left| \frac{x_n}{y_n} - g \right| \leq \left| \frac{x_k - gy_k}{y_n} \right| + \left| 1 - \frac{y_k}{y_n} \right| \cdot \left| \frac{x_n - x_k}{y_n - y_k} - g \right|.$$

<sup>13</sup>Otto Stolz (1842-1905), matematyk austriacki

Z Odpowiednika twierdzenia o ilorazie ciągów (Wniosek 3.8.4) dla ciągu stałego  $(x_k - gy_k)_{n=1}^{\infty}$  oraz ciągu  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  mamy  $\frac{x_k - gy_k}{y_n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Zatem z definicji granicy

$$(3.6) \quad \exists N_3 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_3 : \quad \left| \frac{x_k - gy_k}{y_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech teraz  $N := N_1 + N_2 + N_3$  oraz  $n \geq N$ . Wtedy w nierówności (3.5) możemy oszacować wszystkie trzy moduły po prawej stronie z (3.6), (3.3) oraz (3.4) otrzymując

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - g \right| < \frac{\varepsilon}{2} + 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Za pomocą tego twierdzenia można na przykład wyliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{(n+1)^k} \text{ dla dowolnego } k \in \mathbb{N}^*.$$

### Wniosek 3.8.7 (Twierdzenie Cauchy'ego o średnich arytmetycznych)

Jeśli  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  i  $a_n \rightarrow a$ , to  $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a$ .

**Dowód:** Niech  $x_n = a_1 + \dots + a_n$  i  $y_n = n$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ . Wtedy ciąg  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  jest rosnący i dąży do plus nieskończoności (Przykład 3.7.2). Ponadto

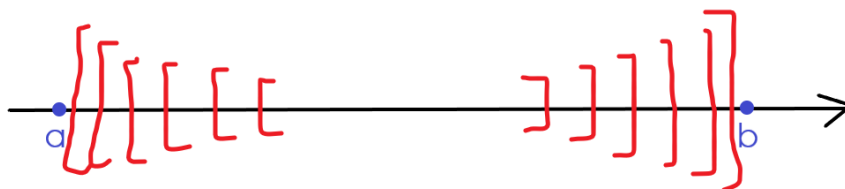
$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{a_{n+1}}{n+1 - n} = a_{n+1} \rightarrow a.$$

Teza wynika z Twierdzenia 3.8.6 Stolza. ■

### Twierdzenie 3.8.8 (Odpowiednik Twierdzenia Stolza dla granicy niewłaściwej)

Niech  $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$  oraz niech ciąg  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  będzie rosnący. Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty$  (odp.  $-\infty$ ), to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$  (odp.  $-\infty$ ).

**Dowód:** ćwiczenie. ■



**Lemat 3.8.9** Niech  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  i niech  $a < b$ . Wtedy istnieją takie ciągi malejące  $(a_n)_{n=1}^\infty$  i rosnące  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ , że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n < b_n$  i  $(a, b) = \bigcup_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$ .

Co więcej, jeśli  $A$  jest przedziałem nie redukującym się do punktu, to istnieją takie ciągi nierosnący  $(a_n)_{n=1}^\infty$  i niemalejące  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ , że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n < b_n$  i  $A = \bigcup_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$ .

**Dowód (szkic):** Jeśli  $a = -\infty, b = +\infty$ , połóżmy  $a_n = -n, b_n = n$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Niech teraz  $a, b \in \mathbb{R}$ . Z Zasady Archimedesesa (Twierdzenie 1.4.4) istnieje takie  $k \in \mathbb{N}^*$ , że  $k > \frac{2}{b-a}$ . Definiujemy

$$a_n := a + \frac{1}{n+k}, \quad b_n := b - \frac{1}{n+k} \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Mamy

$$b_n - a_n = b - a - \frac{2}{n+k} > b - a - \frac{2}{k} > b - a - (b - a) = 0.$$

Pozostałe przypadki – ćwiczenie. ■

### 3.9 Pierwiastki i potęgi wymierne

Wykorzystamy teraz zgodność granic z działaniami do postawienia formalnej definicji pierwiastków i potęg. Ten podrozdział znowu dotyczy prawie wyłącznie liczb rzeczywistych.

**Przykład 3.9.1** Niech  $a \in \mathbb{C}$ . Wtedy:

- (i)  $|a| < 1 \implies a^n \longrightarrow 0$ ;
- (ii)  $a = 1 \implies a^n \longrightarrow 1$ ;
- (iii)  $a > 1 \implies a^n \longrightarrow +\infty$ ;
- (iv)  $a \leq -1 \implies (a^n)_{n=1}^\infty$  jest rozbieżny.

**Dowód:** (i) Jeśli  $a = 0$ , to ciąg jest stały i stosujemy Przykład 3.1.2.

Jeśli  $a \neq 0$ , to połóżmy  $\delta := \frac{1}{|a|} - 1 > 0$  i z nierówności Bernoullego (1.2)

$$\frac{1}{|a^n|} = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta \longrightarrow +\infty$$

(ćwiczenie), stąd  $\frac{1}{|a^n|} \longrightarrow +\infty$  na mocy Twierdzenia 3.7.6 o odpychaniu do nieskończoności. Zatem wobec Twierdzenia 3.8.3 o odwracaniu nieskończoności mamy  $|a^n| \longrightarrow 0$  i wystarczy zastosować Lemat 3.2.2.

(ii) Ciąg jest stały i stosujemy Przykład 3.1.2.

(iii) Niech  $\delta := a - 1 > 0$  i ponownie na mocy nierówności Bernoullego (1.2)

$$a^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta \longrightarrow +\infty$$

i wystarczy zastosować Twierdzenie 3.7.6 o odpychaniu do nieskończoności.

(iv) Przypadek  $a = -1$  był rozpatrzony w Przykładzie 3.1.4.

Założmy teraz, że  $a < -1$ . Wobec poprzedniego punktu  $a^{2n} \longrightarrow +\infty$  oraz  $a^{2n+1} \longrightarrow -\infty$  (por. Twierdzenie 3.8.1), zatem nie istnieje ani granica właściwa ani niewłaściwa na mocy Twierdzenia 3.5.4 o granicy podciągu i Własności granic niewłaściwych (Twierdzenia 3.7.3(ii)). ■

### Własność 3.9.2 (O zbieżności potęg naturalnych)

Niech  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ ,  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Wtedy:

1. Jeśli  $a \in \mathbb{C}$  i  $a_n \longrightarrow a$ , to  $a_n^k \longrightarrow a^k$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
2. Jeśli  $b_n \longrightarrow +\infty$ , to  $b_n^k \longrightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
3. Jeśli  $b_n \longrightarrow -\infty$  i  $k$  jest liczbą parzystą, to  $b_n^k \longrightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).
4. Jeśli  $b_n \longrightarrow -\infty$  i  $k$  jest liczbą nieparzystą, to  $b_n^k \longrightarrow -\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Dowód:** 1., 2. Indukcja względem  $k$ , przekazywanie wyniku z Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach lub odpowiednio z Wniosku 3.8.2.

3., 4. Wynika z 2. i Własności granic niewłaściwych (Twierdzenie 3.7.3), bo jeśli zdefiniujemy  $c_n = -b_n$ , to  $c_n \longrightarrow +\infty$  na mocy Twierdzenia 3.7.3, zatem  $c_n^k \longrightarrow +\infty$ . Dalej jeśli  $k$  jest parzyste, to  $b_n^k = c_n^k$ , natomiast jeśli  $k$  jest nieparzyste, to  $b_n^k = -c_n^k$ . ■

### Twierdzenie 3.9.3 (Istnienie i jednoznaczność pierwiastka)

1. Jeśli  $a \geq 0$  oraz  $k \in \mathbb{N}^*$ , to istnieje dokładnie jedna taka liczba  $p \geq 0$ , że  $p^k = a$ .
2. Jeśli  $a < 0$  i  $k \in \mathbb{N}^*$  jest nieparzyste, to istnieje dokładnie jedna taka liczba  $p < 0$ , że  $p^k = a$ .

**Dowód:** Jedyność wynika ze zgodności porządku z działaniami, mianowicie mamy  $p_1 < p_2 \implies p_1^k < p_2^k$ .

Krok I. Jeśli  $a = 0$  lub  $a = 1$  lub  $k = 1$ , to nie ma czego dowodzić.

Krok II. Niech teraz  $a > 1$  i  $k \geq 2$ . Rozważmy zbiór  $A := \{q > 0 : q^k \leq a\}$ . Oczywiście  $1 \in A$ . Zauważmy, że

$$q > a \implies q^k > a^k > a,$$

a stąd przez kontrapozycję wynika, że  $a$  jest majorantą zbioru  $A$ . Pokazaliśmy, że zbiór  $A$  jest niepusty i ograniczony od góry, zatem na mocy Aksjomatu Dedekinda (Twierdzenie 1.4.9) istnieje  $p := \sup A \in \mathbb{R}$ . Zauważmy, że  $p \geq 1$ , skoro  $1 \in A$ .

Na mocy Ciągowego warunku koniecznego i wystarczającego kresu zbioru (Twierdzenie 3.4.6) istnieje  $(q_n)_{n=1}^\infty \subset A$  taki, że  $q_n \rightarrow p$ . Mamy  $q_n^k \rightarrow p^k (n \rightarrow \infty)$  na mocy Własności 3.9.2, a stąd z Wniosku 3.3.2 z Twierdzenia o zachowaniu nierówności słabej wynika, że  $p^k \leq a$ , więc  $p \in A$ , co oznacza, że  $p = \max A$  i w szczególności  $p \leq a$ .

Chcemy pokazać, że  $p^k = a$ . Załóżmy zatem dla dowodu nie wprost, że  $p^k < a$ . Zauważmy, że jeśli  $h > 0$ , to z (1.5) wynika, że

$$(p+h)^k - p^k = h \left( (p+h)^{k-1} + (p+h)^{k-2}p + \dots + (p+h)p^{k-2} + p^{k-1} \right) < kh(p+h)^{k-1}.$$

Weźmy  $h := \min \left\{ 1, \frac{a - p^k}{k(p+1)^{k-1}} \right\}$ . Wtedy

$$(p+h)^k < p^k + kh(p+h)^{k-1} \leq p^k + k \frac{a - p^k}{k(p+1)^{k-1}} \cdot (p+1)^{k-1} = a$$

a to jest sprzeczność z faktem, że  $p = \sup A$ . Pokazaliśmy zatem, że  $p^k = a$ .

Krok III. Niech teraz  $a \in (0, 1)$  i  $k \geq 2$ . Wtedy  $\frac{1}{a} > 1$ , zatem z kroku II istnieje takie  $r > 0$ , że  $r^k = \frac{1}{a}$ . Ale stąd  $\left(\frac{1}{r}\right)^k = a$ .

Krok IV. Niech teraz  $a < 0$  i  $k$  będzie nieparzyste. Wtedy  $-a > 0$ , zatem z kroków I, II i III istnieje takie  $s > 0$ , że  $s^k = -a$ . Stąd wynika, że  $(-s)^k = a$ . ■

To twierdzenie pozwala zdefiniować poprawnie [pierwiastek](#):

$$a = p^k \iff p = a^{1/k} = \sqrt[k]{a}.$$

Zauważmy, że  $a < b \iff \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$ , a to oznacza, że funkcja  $[0, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt[k]{x} \in \mathbb{R}$  jest rosnąca (zob. także Własność 2.3.3). Funkcję tę można rozszerzyć na całe  $\mathbb{R}$  w przypadku liczby nieparzystej  $k$  – wtedy nadal jest to funkcja rosnąca. Ponadto z dowodu poprzedniego Twierdzenia wynika, że jeśli  $a \in \mathbb{R}$  i  $k$  jest liczbą nieparzystą, to  $\sqrt[k]{-a} = -\sqrt[k]{a}$ .

### Własność 3.9.4 (O zbieżności pod pierwiastkiem)

Niech  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset [0, +\infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Wtedy:

1. Jeśli  $a_n \rightarrow a$ , to  $\sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{a} (n \rightarrow \infty)$ .
2. Jeśli  $b_n \rightarrow +\infty$ , to  $\sqrt[k]{b_n} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ .

**Dowód:** 1.  $a \geq 0$  wobec Wniosku 3.3.2.

Niech najpierw  $a = 0$ . Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy ciągu

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : a_n < \varepsilon^k,$$

a stąd

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |\sqrt[k]{a_n} - 0| < \varepsilon,$$

Niech teraz  $a \neq 0$ . Z definicji granicy ciągu wynika, że

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : a - a_n < \frac{a}{2},$$

zatem  $a_n > \frac{a}{2}$  dla  $n \geq N$ . Korzystamy z (1.5) otrzymując

$$0 \leq |\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt[k]{a_n}^{k-1} + \sqrt[k]{a_n}^{k-2} \sqrt[k]{a} + \dots + \sqrt[k]{a}^{k-1}} \leq \frac{|a_n - a|}{k \sqrt[k]{a/2}^{k-1}}.$$

Korzystamy z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach i Lematu 3.2.2.

2. Z definicji granicy niewłaściwej

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : b_n > 1.$$

Stosujemy teraz przypadek  $a = 0$  z punktu 1. do ciągu  $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n=N}^{\infty}$  oraz Twierdzenie 3.8.3 o odwracaniu nieskończoności. ■

**Przykład 3.9.5**  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ .

**Dowód:** Wobec Lematu 3.2.2 wystarczy pokazać, że  $\sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . Niech  $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ . Mamy  $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ , a stąd w szczególności  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \geq 0$ . Co więcej ze wzoru (1.4) na dwumian Newtona dla dowolnego  $n \geq 2$

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_n^j \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2 = 1 + \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Zatem  $a_n^2 \leq \frac{2}{n}$ , a w konsekwencji

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Wobec Przykładu 3.1.2, Lematu 3.2.4 oraz Własności 3.9.4 o zbieżności pod pierwiastkiem mamy  $\sqrt{\frac{2}{n}} \rightarrow 0$ . Wystarczy teraz skorzystać z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach. ■

**Wniosek 3.9.6** Jeśli  $a > 0$ , to  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$ .

**Dowód:** I. Jeśli  $a = 1$ , to nie ma czego dowodzić, bo mamy do czynienia z ciągiem stałym (Przykład 3.1.2).

II. Niech teraz  $a > 1$ . Można przeprowadzić analogiczny dowód jak ten w przypadku powyższego przykładu (stosując nierówność Bernoullego (ćwiczenie)). Ale tu wykorzystamy powyższy przykład. Wobec Zasady Archimedesesa (Twierdzenie 1.4.4) istnieje takie  $N \in \mathbb{N}^*$ , że  $a < N$ . Zatem z monotoniczności pierwiastka mamy

$$\forall n \geq N : 1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$

Wystarczy teraz skorzystać z powyższego Przykładu 3.9.5 i Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach.

III. Niech teraz  $a \in (0, 1)$ . Z poprzedniego kroku  $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \rightarrow 1$ , zatem z Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \rightarrow 1 \ (n \rightarrow \infty).$$

■

Niech  $k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N}^*$  oraz  $a > 0$ . Definiujemy  $a^{k/l} := (a^{1/l})^k = \sqrt[l]{a^k}$ . Ponadto, jeśli  $l$  jest nieparzyste, to można rozszerzyć tę definicję na  $a < 0$ , natomiast jeśli  $k$  jest nieujemne, na  $a = 0$ .

**Lemat 3.9.7** *Jeśli  $a, b > 0, p, q \in \mathbb{Q}, k, m \in \mathbb{Z}, l, j \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{R}$ , to*

1.  $1^q = 1, a^0 = 1$ ;
2.  $\frac{k}{l} = \frac{m}{j} \implies a^{k/l} = a^{m/j}$ ;
3.  $(ab)^q = a^q b^q, a^{p+q} = a^p a^q, (a^p)^q = a^{pq}$ ;
4.  $q > 0 \implies (0, +\infty) \ni x \mapsto x^q \in (0, +\infty)$  jest rosnąca;
5.  $q < 0 \implies (0, +\infty) \ni x \mapsto x^q \in (0, +\infty)$  jest malejąca;
6.  $a > 1 \implies \mathbb{Q} \ni x \mapsto a^x \in (0, +\infty)$  jest rosnąca;
7.  $a \in (0, 1) \implies \mathbb{Q} \ni x \mapsto a^x \in (0, +\infty)$  jest malejąca;
8.  $a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) \implies a_n^p \rightarrow a^p \ (n \rightarrow \infty)$ ;
9.  $a \geq 1 \implies \{a^r : r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, c]\}$  jest niepusty i ograniczony od góry.

**Dowód:** ćwiczenie.

■

### 3.10 Potęgi rzeczywiste

**Definicja 3.10.1 (Potęga rzeczywista)** Niech  $a > 0$  i  $c \in \mathbb{R}$ .

Jeśli  $c > 0$ , to definiujemy  $0^c := 0$ .

Jeśli  $a \geq 1$ , to definiujemy

$$a^c := \sup \{a^q : q \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, c]\}.$$

Jeśli  $a \in (0, 1)$ , definiujemy

$$a^c := \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}.$$

Definicja jest poprawna na mocy Aksjomatu Dedekinda (Twierdzenie 1.4.9), bo zbiór, dla którego liczymy supremum jest niepusty i ograniczony od góry z Lematu 3.9.7. Ponadto jeśli  $c$  jest liczbą wymierną, to supremum w definicji jest maksimum i definicja zgadza się z poprzednią wobec monotoniczności odpowiednich funkcji (Lemat 3.9.7).

**Własność 3.10.2** Jeśli  $a > 1$  oraz  $c \in \mathbb{R}$ , to istnieje niemalejący ciąg  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$  liczb wymiernych zbieżny do  $c$  i taki, że  $(a^{q_n})_{n=1}^{\infty}$  jest niemalejący i zbieżny do  $a^c$ .

**Dowód:** Niech  $A := \{a^q : q \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, c]\}$ . Wtedy z definicji  $a^c = \sup A$ .

Na mocy Ciągowego warunku koniecznego i wystarczającego kresu (czyli Twierdzenia 3.4.6) istnieje niemalejący ciąg elementów zbioru  $A$  zbieżny do jego supremum, a to oznacza, że istnieje ciąg liczb wymiernych  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$  mniejszych od  $c$  i takich, że ciąg  $(a^{q_n})_{n=1}^{\infty}$  jest niemalejący i zbieżny do  $a^c$ . Wobec monotoniczności funkcji  $\mathbb{Q} \ni q \mapsto a^q \in \mathbb{R}$  (Lemat 3.9.7) ciąg  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$  jest też niemalejący, a ponieważ jest ograniczony od góry przez  $c$ , więc jest zbieżny na mocy Kryterium zbieżności ciągów monotonicznych (Twierdzenie 3.4.2).

Niech  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ . Z Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej wynika, że  $y \leq c$ , bo  $\forall n \in \mathbb{N}^* : q_n \leq c$ .

Aby dowód zakończyć, trzeba pokazać, że  $y = c$ . Załóżmy dla dowodu nie wprost, że  $y < c$ . Stosujemy Własność 1.4.6 gęstości  $\mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$  dwa razy otrzymując dwie liczby wymierne  $p, r$  takie, że  $y < p < r < c$ . W szczególności wynika stąd, że  $a^r \in A$ . Ponieważ  $\forall n \in \mathbb{N}^* : q_n \leq y$  (to wynika z faktu, że ciąg  $(q_n)_{n=1}^{\infty}$  jest niemalejący), więc mamy  $a^{q_n} < a^p < a^r$  i znowu z Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności wnioskujemy, że  $a^c \leq a^p < a^r$ , a to jest sprzeczność z definicją supremum. ■

**Lemat 3.10.3** Niech  $a > 0$ ,  $g \in \mathbb{R}$  oraz  $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ . Wtedy:

(i) Jeśli  $q_n \rightarrow +\infty$  lub  $q_n \rightarrow -\infty$ , to  $a^{1/q_n} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(ii) Jeśli  $q_n \rightarrow 0$ , to  $a^{q_n} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(iii) Jeśli  $q_n \rightarrow g$ , to  $a^{q_n} \rightarrow a^g$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Dowód:** (i) Niech  $q_n \rightarrow +\infty$  i  $a > 1$ . Bez straty ogólności możemy założyć, że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : q_n \geq 1$ .

Ponieważ  $\forall n \in \mathbb{N}^* : [q_n] \leq q_n < [q_n] + 1$  z (2.2), zatem na mocy Twierdzenia 3.7.6 o odpychaniu do nieskończoności ciąg  $([q_n] + 1)_{n=1}^\infty$  dąży do  $+\infty$ , a stąd także  $([q_n])_{n=1}^\infty$  dąży do  $+\infty$  (por. Twierdzenie 3.7.8) i są to ciągi dodatnich liczb naturalnych. Na mocy Lematu 3.9.7

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 < a^{\frac{1}{q_n}} \leq a^{\frac{1}{[q_n]}}.$$

Na mocy Wniosku 3.9.6 i Lematu 3.7.5 skrajne ciągi są zbieżne do 1. Wystarczy zastosować Twierdzenie 3.3.4 o trzech ciągach.

Pozostałe przypadki – ćwiczenie.

(ii) Rozważmy dowolny podciąg ciągu  $(a^{q_n})_{n=1}^\infty$  i zadający go zbiór nieskończony  $\mathbb{L}$ . Mamy podciąg  $(q_n)_{n \in \mathbb{L}}$ . Niech  $\mathbb{L}_- = \{n \in \mathbb{L} : q_n < 0\}$ ,  $\mathbb{L}_+ := \{n \in \mathbb{L} : q_n > 0\}$  oraz  $\mathbb{L}_0 := \{n \in \mathbb{L} : q_n = 0\}$ . Te zbiory są parami rozłączne i w sumie dają cały zbiór  $\mathbb{L}$ , zatem przynajmniej jeden z nich jest nieskończony.

Jeśli  $\mathbb{L}_-$  jest nieskończony, to na mocy Twierdzenia 3.8.3 o odwracaniu nieskończoności ciąg  $(1/q_n)_{n \in \mathbb{L}_-}$  dąży do  $-\infty$ , zatem z punktu (i) wynika, że  $(a^{q_n})_{n \in \mathbb{L}_-}$  jest zbieżny do 1.

Jeśli  $\mathbb{L}_+$  jest nieskończony, to na mocy Twierdzenia 3.8.3 o odwracaniu nieskończoności ciąg  $(1/q_n)_{n \in \mathbb{L}_+}$  dąży do  $+\infty$ , zatem z punktu (i) wynika, że  $(a^{q_n})_{n \in \mathbb{L}_+}$  jest zbieżny do 1.

Jeśli natomiast  $\mathbb{L}_0$  jest nieskończony, to  $(a^{q_n})_{n \in \mathbb{L}_0}$  jest stały, stale równy 1.

Na mocy Twierdzenia 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach z dowolności wybranego podciągu  $a^{q_n} \rightarrow 1$ .

(iii) Udowodnimy dla  $a > 1$ . Na mocy Własności 3.10.2 istnieje taki ciąg  $(p_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ , że  $p_n \rightarrow g$  i  $a^{p_n} \rightarrow a^g$ . Wtedy  $q_n - p_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  i stosując Lemat 3.9.7 otrzymujemy

$$a^{q_n} = a^{p_n} \cdot a^{q_n - p_n} \rightarrow a^g \cdot 1 = a^g \quad (n \rightarrow \infty)$$

z (ii) i Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach. ■

**Własność 3.10.4 (Własności potęg)** Niech  $a, b > 0$  oraz  $r, s \in \mathbb{R}$ . Wtedy:

1.  $(ab)^r = a^r b^r$ ,  $a^{r+s} = a^r a^s$ ;
2.  $r > 0 \implies (0, +\infty) \ni x \mapsto x^r \in (0, +\infty)$  jest rosnąca;
3.  $r < 0 \implies (0, +\infty) \ni x \mapsto x^r \in (0, +\infty)$  jest malejąca;
4.  $a > 1 \implies \mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, +\infty)$  jest rosnąca;
5.  $a \in (0, 1) \implies \mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in (0, +\infty)$  jest malejąca.

**Dowód:** 1. Pokażemy dla  $ab > 1$  ( $ab \in (0, 1]$  ćwiczenie). Na mocy Własności 3.10.2 istnieje taki ciąg  $(q_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ , że  $q_n \rightarrow r$  oraz  $(ab)^{q_n} \rightarrow (ab)^r$ . Wobec Lematu 3.10.3 mamy  $a^{q_n} \rightarrow a^r$ ,  $b^{q_n} \rightarrow b^r$ . Z Lematu 3.9.7 otrzymujemy

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : (ab)^{q_n} = a^{q_n} b^{q_n}$$

i wystarczy przejść do granicy przy  $n \rightarrow \infty$  stosując Twierdzenie 3.2.7 o działaniach na granicach.

Druga równość analogicznie (ćwiczenie).

2. Niech  $0 < a < b$ . Wobec tego  $\frac{b}{a} > 1$ . Na mocy Własności 3.10.2 istnieje taki niemalejący ciąg  $(q_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$ , że  $q_n \rightarrow r$  oraz ciąg  $\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{q_n}\right)_{n=1}^\infty$  jest też niemalejący i zbieżny do  $\left(\frac{b}{a}\right)^r$ . Ponieważ  $r > 0$ , to wobec Twierdzenia 3.3.3 o zachowaniu znaku bez straty ogólności możemy założyć, że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : q_n > 0$ . Z Lematu 3.9.7

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : a^{q_n} < b^{q_n}.$$

Stąd wobec monotoniczności ciągu  $\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{q_n}\right)_{n=1}^\infty$

$$1 < \left(\frac{b}{a}\right)^{q_1} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^{q_n} \leq \left(\frac{b}{a}\right)^r$$

i w konsekwencji mamy  $a^r < b^r$ .

4. Niech  $r < s$ . Na mocy Własności 1.4.6 gęstości  $\mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$  istnieją takie liczby wymierne  $p, q$ , że  $r < p < q < s$ . Na mocy Własności 3.10.2 istnieją ciągi niemalejące  $(p_n)_{n=1}^\infty$  i  $(q_n)_{n=1}^\infty$  zbieżne odpowiednio do  $r$  i  $s$  (w szczególności  $\forall n \in \mathbb{N}^* : p_n \leq r < p$ ) i takie, że  $(a^{p_n})_{n=1}^\infty$  i  $(a^{q_n})_{n=1}^\infty$  są niemalejące i zbieżne odpowiednio do  $a^r$  i  $a^s$ . Z definicji granicy wynika, że

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : q_n > q.$$

Z Lematu 3.9.7

$$\forall n \geq N : a^{p_n} < a^p < a^q < a^{q_n}.$$

Na mocy Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej mamy

$$a^r \leq a^p < a^q \leq a^s.$$

Punkty 3 i 5 – ćwiczenie. ■

### **Twierdzenie 3.10.5 (O ciągach wykładników)**

Niech  $a > 0, b \in \mathbb{R}$ ,  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Wtedy:

1. jeśli  $b_n \rightarrow b$ , to  $a^{b_n} \rightarrow a^b$ ;
2. jeśli  $b_n \rightarrow -\infty$  (odp.  $+\infty$ ) i  $a > 1$  (odp.  $a \in (0, 1)$ ), to  $a^{b_n} \rightarrow 0$ ;
3. jeśli  $b_n \rightarrow +\infty$  (odp.  $-\infty$ ) i  $a > 1$  (odp.  $a \in (0, 1)$ ), to  $a^{b_n} \rightarrow +\infty$ .

**Dowód: 1.**

Krok I. Pokażemy najpierw, że jeśli  $c_n \rightarrow +\infty$ , to  $a^{1/c_n} \rightarrow 1$ .

Powtarzamy dowód Lematu 3.10.3(i), przy czym teraz nierówności

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 1 < a^{\frac{1}{c_n}} \leq a^{\frac{1}{[c_n]}}$$

dla  $a > 1$  wynikają z Własności 3.10.4 potęg.

Krok II. Z poprzedniego kroku łatwo wywnioskować, że jeśli  $c_n \rightarrow -\infty$ , to  $a^{1/c_n} \rightarrow 1$ .

Krok III. Chcemy teraz pokazać, że jeśli  $b_n \rightarrow 0$ , to  $a^{b_n} \rightarrow 1$ . Powtarzamy tu dokładnie dowód Lematu 3.10.3(ii), wykorzystując krok I i krok II tego dowodu zamiast Lematu 3.10.3(i).

Krok IV. Na mocy Własności 1.4.6 gęstości  $\mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$  dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}^*$  istnieje liczba wymierna  $q_n$  taka, że  $b_n < q_n < b_n + \frac{1}{n}$ . Z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach wynika, że  $q_n \rightarrow b$ . Wobec tego z Własności 3.10.4, Lematu 3.10.3, Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach i kroku III

$$a^{b_n} = a^{q_n} \cdot a^{b_n - q_n} \rightarrow a^b \cdot 1 = a^b (n \rightarrow \infty).$$

2. Niech  $a \in (0, 1)$  i  $b_n \rightarrow +\infty$ . Rozumując jak w dowodzie Lematu 3.10.3(i) wnioskujemy, że  $[b_n] \rightarrow +\infty$ . Zatem na mocy Przykładu 3.9.1 i Lematu 3.7.5

$$a^{[b_n]} \rightarrow 0.$$

Ale ponieważ  $[b_n] \leq b_n$ , więc na mocy Własności 3.10.4 potęg

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad 0 < a^{b_n} \leq a^{[b_n]}$$

i wystarczy skorzystać z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach.

3. Niech  $a > 1$  i  $b_n \rightarrow +\infty$ . Wtedy  $\frac{1}{a} \in (0, 1)$  i z punktu 2. wynika, że

$$\frac{1}{a^{b_n}} \rightarrow 0.$$

Ponieważ  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{a^{b_n}} > 0$ , teza wynika z Twierdzenia 3.8.3 o odwracaniu nieskończoności.

Pozostałe przypadki – ćwiczenie. ■

**Wniosek 3.10.6** *Jeśli  $a > 0$  oraz  $r, s \in \mathbb{R}$ , to  $(a^r)^s = a^{rs}$ .*

**Dowód:** Na mocy Lematu 3.3.6 istnieją ciągi  $(p_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$  i  $(q_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$  zbieżne odpowiednio do  $r$  i  $s$ . Na mocy Lematu 3.9.7

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* : (a^{p_n})^{q_m} = a^{p_n q_m}.$$

Ustalamy dowolne  $m \in \mathbb{N}^*$  i przechodzimy do granicy z  $n \rightarrow \infty$ , zauważając, że  $p_n q_m \rightarrow r q_m$  ( $n \rightarrow \infty$ ), dzięki Własności 3.9.4 zbieżności pod pierwiastkiem oraz Własności 3.9.2 zbieżności potęg naturalnych, jak również wobec Twierdzenia 3.10.5 o ciągach wykładników

$$\forall m \in \mathbb{N}^* : (a^r)^{q_m} = a^{r q_m}.$$

I jeszcze raz stosujemy powyższe twierdzenie przechodząc do granicy przy  $m \rightarrow \infty$  i wykorzystując Twierdzenie 3.2.7 o działaniach na granicach (bo w szczególności  $r q_m \rightarrow r s$  ( $m \rightarrow \infty$ )). ■

### Własność 3.10.7 (O ciągu ograniczonym wykładników)

Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$  i  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Wtedy:

- (i) jeśli  $a_n \rightarrow 1$  i  $(b_n)_{n=1}^\infty$  jest ograniczony, to  $a_n^{b_n} \rightarrow 1$ ;
- (ii) jeśli  $a_n \rightarrow 0$  (odp.  $+\infty$ ) i istnieje takie  $b > 0$ , że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : b_n > b$ , to  $a_n^{b_n} \rightarrow 0$  (odp.  $+\infty$ ).

**Dowód:** (i) Ponieważ  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$  jest ograniczony, więc istnieją takie liczby  $u, v \in \mathbb{Z}$ , że  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset [u, v]$ .

Rozważmy dowolny podciąg  $(a_n^{b_n})_{n \in \mathbb{L}}$  oraz trzy zbiory  $\mathbb{L}_- := \{n \in \mathbb{L} : a_n \in (0, 1)\}$ ,  $\mathbb{L}_+ := \{n \in \mathbb{L} : a_n > 1\}$ ,  $\mathbb{L}_1 := \{n \in \mathbb{L} : a_n = 1\}$ . Ponieważ w sumie dają one cały  $\mathbb{L}$ , który jest nieskończony, więc któryś z nich musi być nieskończony i ten nieskończony wybieramy i oznaczamy literą  $\mathbb{M}$ .

Mamy wobec Własności 3.10.4 potęg

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{L}_- : & \quad a_n^v \leq a_n^{b_n} \leq a_n^u, \\ \forall n \in \mathbb{L}_+ : & \quad a_n^u \leq a_n^{b_n} \leq a_n^v, \\ \forall n \in \mathbb{L}_1 : & \quad a_n^{b_n} = 1. \end{aligned}$$

Zatem podciąg  $(a_n^{b_n})_{n \in \mathbb{M}}$  jest zbieżny do 1 (stosujemy Twierdzenie 3.3.4 o trzech ciągach i Własność 3.9.2 zbieżności potęg). Teza wynika z Twierdzenia 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach.

(ii) ćwiczenie. ■

### Twierdzenie 3.10.8 (O ciągach wykładniczych)

Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset (0, +\infty)$ ,  $(b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a_n \rightarrow \alpha$ ,  $b_n \rightarrow \beta$ . Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} =$$

1.  $+\infty$ , jeśli

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = +\infty \\ \beta \in (0, +\infty] \end{array} \right\} \text{ lub } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in (1, +\infty) \\ \beta = +\infty \end{array} \right\} \text{ lub } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in (0, 1) \\ \beta = -\infty \end{array} \right\} \text{ lub } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta \in [-\infty, 0) \end{array} \right\} ;$$

2.  $\alpha^\beta$ , jeśli  $\alpha \in (0, +\infty)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ;

3. 0, jeśli

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = +\infty \\ \beta \in [-\infty, 0) \end{array} \right\} \text{ lub } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in (1, +\infty) \\ \beta = -\infty \end{array} \right\} \text{ lub } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in (0, 1) \\ \beta = +\infty \end{array} \right\} \text{ lub } \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta \in (0, +\infty] \end{array} \right\} .$$

**Dowód:** 2. Zauważmy, że  $(b_n)_{n=1}^\infty$  jako zbieżny, jest ograniczony (Twierdzenie 3.1.8 o ograniczoności ciągu zbieżnego). Ponadto  $\frac{a_n}{\alpha} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$  (Twierdzenie 3.2.7 o działaniach na granicach).

Wobec tego wnioskujemy z Własności 3.10.4 potęg, Twierdzenia 3.10.5 o ciągu wykładników i Własności 3.10.7 ciągu ograniczonego wykładników, że

$$a_n^{b_n} = \alpha^{b_n} \cdot \left( \frac{a_n}{\alpha} \right)^{b_n} \rightarrow \alpha^\beta \cdot 1 = \alpha^\beta (n \rightarrow \infty).$$

Pozostałe podpunkty – ćwiczenie. ■

Otrzymaliśmy tu trzy wykładnicze symbole nieoznaczone:  $[1^\infty]$ ,  $[0^0]$ ,  $[\infty^0]$ . Rozważmy ciąg dany wzorem ogólnym  $x_n = 3 + (-1)^n$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ . Jest to ciąg rozbieżny. Natomiast  $a_n := x_n^{1/n} \rightarrow 1$ , zatem  $(a_n)_{n=1}^\infty$  jest przykładem symbolu  $[1^\infty]$  rozbieżnego. Dalej  $b_n = x_n^n \rightarrow +\infty$ , więc  $(b_n)_{n=1}^\infty$  jest przykładem symbolu  $[\infty^0]$  rozbieżnego; wreszcie jeśli  $c_n = 1/b_n$ , to  $(c_n)_{n=1}^\infty$  jest przykładem symbolu  $[0^0]$  rozbieżnego.

Ćwiczenie: Podać przykłady ciągów  $(a_n)_{n=1}^\infty$  i  $(b_n)_{n=1}^\infty$  takich, że ciąg  $(a_n^{b_n})_{n=1}^\infty$  reprezentuje któryś z wykładniczych symboli nieoznaczonych, a dąży do a) 0, b) 1, c) 5, d)  $+\infty$ .

**Własność 3.10.9** Niech  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $(y_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

1. Jeśli  $x_n \rightarrow +\infty$  lub  $x_n \rightarrow -\infty$ , to  $\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \rightarrow e$ .

2. Jeśli  $y_n \rightarrow 0$ , to  $(1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} \rightarrow e$ .

**Dowód:** ćwiczenie. ■

### 3.11 Granice dolne i górne

Podrozdział dotyczy  $\mathbb{R}$ , a dokładniej  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Niech  $A \subset \overline{\mathbb{R}}$  będzie niepusty. Jeśli  $-\infty \in A$ , to  $\inf A = -\infty$ , jeśli  $+\infty \in A$ , to  $\sup A = +\infty$ . Jeśli  $A = \{-\infty\}$ , to  $\inf A = \sup A = -\infty$ . Jeśli  $A = \{+\infty\}$ , to  $\inf A = \sup A = +\infty$ . Jeśli  $-\infty \notin A$  i  $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ , to albo  $A$  jest ograniczony od dołu i wtedy  $\inf A \in \mathbb{R}$  (na mocy Aksjomatu Dedekinda, Twierdzenia 1.4.9), albo  $A$  nie jest ograniczony od dołu i wtedy  $\inf A = -\infty$ . Jeśli  $+\infty \notin A$  i  $A \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ , to albo  $A$  jest ograniczony od góry i wtedy  $\sup A \in \mathbb{R}$  (znowu z Aksjomatu Dedekinda), albo  $A$  nie jest ograniczony od góry i wtedy  $\sup A = +\infty$ . W każdym razie niepusty podzbiór  $\overline{\mathbb{R}}$  ma zawsze oba kresy i zawsze wtedy  $\inf A \leq \sup A$ .

**Definicja 3.11.1 (Granica górna i dolna ciągu)** Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  i niech

$$A := \{a \in \overline{\mathbb{R}} : a \text{ jest granicą (właściwą lub nie) pewnego podciągu ciągu } (a_n)_{n=1}^{\infty}\}.$$

Elementy zbioru  $A$  są nazywane *punktami skupienia* ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ .

*Granica górną* ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  nazywamy  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup A$ .

*Granica dolną* ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  nazywamy  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf A$ .

Zauważmy, że wobec Własności 3.8.5 zbiór  $A$  jest niepusty, dlatego definicja jest dobrze postawiona.

Jeśli  $a_n = (-1)^n$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ , to  $A = \{-1, 1\}$ . Jeśli ustawimy wszystkie liczby wymierne w ciąg, to dla otrzymanego ciągu  $A = \overline{\mathbb{R}}$ .

**Własność 3.11.2 (Własności granicy dolnej i górnej)**

Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  i  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ . Wtedy:

1.  $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\};$
2.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$

**Dowód:** Niech  $A$  będzie zbiorem wszystkich punktów skupienia ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ . W szczególności jest on niepusty na mocy Własności 3.8.5.

1. Środkowa nierówność wynika z faktu  $\inf A \leq \sup A$ .

Gdyby

$$a := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n > \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\} =: b,$$

to z definicji supremum (chodzi o supremum zbioru  $A$ ) istniałby element  $c \in (b, a] \cap A$ . Zatem istniałby podciąg ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  zbieżny do  $c$ . Jeśli  $c = +\infty$ , to z definicji granicy niewłaściwej (dla tego podciągu) istniałoby takie  $m \in \mathbb{N}^*$ , że  $a_m > b$ . Natomiast

jeśli  $c \in rj$ , to z definicji granicy (dla tego podciągu) istniałoby takie  $m \in \mathbb{N}^*$ , że  $|a_m - c| < c - b$ , skąd wynika  $c - a_m < c - b$ , a to oznacza, że  $a_m > b$ . Zatem w obu przypadkach mamy sprzeczność z definicją supremum zbioru  $\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ .

Analogicznie pokazujemy lewą nierówność.

2. Mamy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \iff A = \{\alpha\}.$$

Wystarczy zatem pokazać, że

$$A = \{\alpha\} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha.$$

( $\Leftarrow$ )

Jeśli  $\alpha \in \mathbb{R}$ , to ta implikacja wynika z Twierdzenia 3.5.4 o granicy podciągu ciągu zbieżnego.

Natomiast jeśli  $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$ , to z Twierdzenia 3.7.3(ii) o własnościach granic niewłaściwych.

( $\Rightarrow$ )

Ustalmy dowolny podciąg ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ . Na mocy Własności 3.8.5 istnieje podciąg tego ciągu dążący do pewnej granicy. Ta granica jest punktem skupienia, więc należy do zbioru  $A$ , musi być zatem równa  $\alpha$ .

Teraz wystarczy zastosować Twierdzenie 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach w przypadku  $\alpha \in \mathbb{R}$ , względnie Odpowiednik tego twierdzenia, czyli Własność 3.7.4, w przypadku  $\alpha \in \{-\infty, +\infty\}$ . ■

### Własność 3.11.3 (Charakteryzacja granicy dolnej i górnej)

Jeśli  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ , to

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (\text{odp. } \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie następujące dwa warunki:

- 1) istnieje podciąg ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  który dąży do  $\alpha$ ,
- 2) jeśli  $\beta$  jest granicą pewnego podciągu ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ , to  $\alpha \geq \beta$  (odp.  $\alpha \leq \beta$ ).

**Dowód:** Warunek 2) jest równoważny z faktem, że  $\alpha$  jest majorantą (odp. **minorantą**) zbioru  $A$  wszystkich punktów skupienia ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$ . Natomiast warunek 1) mówi tak naprawdę, że ta majoranta (odp. **minoranta**) jest elementem zbioru  $A$ . Zatem to, że z 1)&2) wynika, że  $\alpha$  jest granicą górną (odp. **dolną**), jest oczywiste. Musimy natomiast pokazać, że jeśli  $\alpha$  jest tą granicą górną (odp. **dolną**), to  $\alpha \in A$ , czyli istnieje podciąg zbieżny do  $\alpha$ .

Zrobimy to w przypadku granicy górnej (dolna – ćwiczenie).

Niech  $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Jeśli  $a_n \rightarrow \alpha$ , to szukanym podciągiem może być cały ciąg. Załóżmy teraz, że  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  nie dąży do  $\alpha$ , a to oznacza (por. dowód Własności 3.11.2), że  $A \neq \{\alpha\}$ . W szczególności stąd wynika wobec Własności 3.11.2, że  $\alpha \neq -\infty$ . Rozważamy przypadki:

I. Niech  $\alpha = +\infty$  i załóżmy dla dowodu nie wprost, że  $+\infty \notin A$ . Ponieważ  $\sup A = +\infty$ , więc żadna liczba naturalna nie jest majorantą zbioru  $A$ . Zatem

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \exists \alpha_k \in A : \quad k < \alpha_k < +\infty.$$

$\alpha_k \in A$ , zatem jest granicą pewnego podciągu ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ . Budujemy teraz rekurencyjnie nowy podciąg. Z definicji granicy

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* : \quad |a_{n_1} - \alpha_1| < \alpha_1 - 1,$$

czyli  $a_{n_1} > 1$ . Teraz

$$\exists n_2 > n_1 : \quad |a_{n_2} - \alpha_2| < \alpha_2 - 2,$$

czyli  $a_{n_2} > 2$ . Ogólnie, gdy już mamy  $n_k$ , to

$$\exists n_{k+1} > n_k : \quad |a_{n_{k+1}} - \alpha_{k+1}| < \alpha_{k+1} - k - 1,$$

czyli  $a_{n_{k+1}} > k + 1$ .

Zbudowaliśmy podciąg  $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  taki, że

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad a_{n_k} > k.$$

Z Twierdzenia 3.7.6 o odpychaniu do nieskończoności wynika, że  $a_{n_k} \rightarrow +\infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ), a to oznacza, że  $+\infty \in A$ , sprzeczność.

II. Niech teraz  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ponieważ  $\alpha = \sup A$ , więc na mocy Ciągowego warunku koniecznego i wystarczającego kresu zbioru (Twierdzenie 3.4.6) istnieje ciąg  $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$  elementów zbioru  $A$  zbieżny do  $\alpha$ . Budujemy rekurencyjnie nasz podciąg.  $\alpha_1$  jest granicą pewnego podciągu ciągu  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ , zatem

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^* : \quad |a_{n_1} - \alpha_1| < 1.$$

$\alpha_2$  jest granicą pewnego podciągu, zatem z definicji granicy

$$\exists n_2 > n_1 : \quad |a_{n_2} - \alpha_2| < \frac{1}{2}.$$

Jeśli mamy już  $n_k$ , to ponieważ  $\alpha_{k+1}$  też jest granicą pewnego podciągu, mamy

$$\exists n_{k+1} > n_k : \quad |a_{n_{k+1}} - \alpha_{k+1}| < \frac{1}{k+1}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób podciąg  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$  taki, że

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad \alpha_k - \frac{1}{k} < a_{n_k} < \alpha_k + \frac{1}{k}.$$

Na mocy Przykładu 3.1.2 i Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach skrajne ciągi są zbieżne do  $\alpha$ , zatem  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ ) na mocy Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach. Czyli  $\alpha \in A$ . ■

### Własność 3.11.4 (Nierówności dla granic dolnych i górnych)

Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Wtedy:

1. Przy założeniu, że jeśli  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \in \{-\infty, +\infty\}$ , to  $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \neq -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ , mamy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

2. Przy założeniu, że jeśli  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \{-\infty, +\infty\}$ , to  $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \neq -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ , mamy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

3. Natomiast, jeśli  $a_n \leq b_n$  dla prawie wszystkich  $n$ , to

$$\begin{cases} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \end{cases}.$$

**Dowód:** Pokażemy nierówności dla granic dolnych (dla granic górnych – ćwiczenie).

Niech  $\alpha := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  i  $\beta := \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

1. Niech  $\gamma := \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ . Jeśli  $\gamma = +\infty$ , to nierówność jest prawdziwa. Jeśli natomiast  $\alpha = -\infty$ , to suma po prawej stronie jest równa  $-\infty$  (bo z założenia  $\beta < +\infty$ ), więc też nie ma czego dowodzić.

Założmy zatem, że  $\gamma < +\infty$  oraz  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Wobec Charakteryzacji granicy dolnej (Własność 3.11.3) istnieje podciąg  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{L}}$  dążący do  $\gamma$ . Na mocy Własności 3.8.5 istnieje  $\alpha' \in \mathbb{R}$  i podciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{M}}$  ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}}$  dążący do  $\alpha'$ . Ponieważ  $\alpha > -\infty$ , więc również  $\alpha' > -\infty$ .

Na mocy Twierdzenia 3.5.4 o podciągu ciągu zbieżnego lub Twierdzenia 3.7.3 o własnościach granic niewłaściwych podciąg  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{M}}$  dąży do  $\gamma$ .

Ponieważ  $b_n = (a_n + b_n) - a_n$ , więc na mocy Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach lub Twierdzenia 3.7.8 (Odpowiednika twierdzenia o sumie) podciąg  $(b_n)_{n \in \mathbb{M}}$  dąży do  $\beta' := \gamma - \alpha'$ . Z definicji granicy dolnej mamy  $\alpha' \geq \alpha$  i  $\beta' \geq \beta$ . Stąd  $\gamma = \alpha' + \beta' \geq \alpha + \beta$ .

3. Wobec Charakteryzacji granicy dolnej (Własność 3.11.3) istnieje podciąg  $(b_n)_{n \in \mathbb{L}}$  dążący do  $\beta$ . Na mocy Własności 3.8.5 istnieje  $\alpha' \in \overline{\mathbb{R}}$  i podciąg  $(a_n)_{n \in \mathbb{M}}$  ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbb{L}}$  dążący do  $\alpha'$ . Na mocy Twierdzenia 3.5.4 o podciągu ciągu zbieżnego lub Twierdzenia 3.7.3 o własnościach granic niewłaściwych podciąg  $(b_n)_{n \in \mathbb{M}}$  dąży do  $\beta$ . Na mocy Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej  $\alpha' \leq \beta$ . Ale z definicji granicy dolnej  $\alpha \leq \alpha'$ , czyli z przechodniości nierówności  $\alpha \leq \beta$ . ■

W punktach 1. i 2. powyższej własności na ogół nie da się uzyskać równości. Mianowicie niech

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1}, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}^*.$$

Wtedy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0 > -2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

oraz

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0 < 2 = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Wygodna przy liczeniu granic dolnej i górnej ciągu może być następująca własność, uogólnienie Wniosku 3.5.6 o rozkładzie zupełnym na podciągi.

**Własność 3.11.5 (Uogólnienie wniosku o rozkładzie zupełnym na podciągi)**

Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_1, \dots, a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ . Niech  $\mathbb{N}^* = \mathbb{L}_1 \cup \dots \cup \mathbb{L}_k$  i  $\forall j \in \{1, \dots, k\} : \mathbb{L}_j$  będzie nieskończony. Jeśli  $\forall j \in \{1, \dots, k\} : (a_n)_{n \in \mathbb{L}_j}$  jest zbieżny do  $a_j$ , to jedynymi punktami skupienia ciągu  $(a_n)_{n=1}^\infty$  są elementy  $a_1, \dots, a_k$ . W szczególności najmniejszy z nich jest granicą dolną, a największy granicą górną tego ciągu.

**Dowód:** ćwiczenie. ■

**Lemat 3.11.6** Niech  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ . Wtedy:

(i) Jeśli  $\alpha := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > -\infty$ , to

$$\forall M \in (-\infty, \alpha) \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : a_n > M.$$

(ii) Jeśli  $\beta := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n < +\infty$ , to

$$\forall M \in (\beta, +\infty) \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : a_n < M.$$

**Dowód:** ćwiczenie. ■

**Twierdzenie 3.11.7 (O zależności między pierwiastkiem a ilorazem)**

Niech  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$ . Wtedy:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

W szczególności jeśli istnieje  $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , to również  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$ .

**Dowód:** Środkowa nierówność wynika z Własności 3.11.2 granicy dolnej i górnej.

Niech  $\alpha := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ,  $\beta = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ . Zauważmy najpierw, że  $\alpha \geq 0$  i  $\beta \geq 0$  z Własności 3.11.4 dotyczącej nierówności dla granic dolnej i górnej. Jeśli  $\alpha = 0$ , to pierwsza nierówność w tezie zachodzi skoro  $\beta \geq 0$ .

Założmy zatem, że  $\alpha > 0$ . Wobec Lematu 3.3.7 wystarczy wykazać, że  $\forall x \in (0, \alpha) : \beta \geq x$ . Ustalmy zatem dowolne  $x \in (0, \alpha)$ .

Ustalmy dowolne  $y \in (x, \alpha)$ . Na mocy Lematu 3.11.6

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > y.$$

Indukcyjnie pokazujemy, że  $\forall k \in \mathbb{N}^* : a_{N+k} \geq y^k a_N$ , a to można zapisać

$$\forall n \geq N : \quad a_n \geq y^{n-N} a_N.$$

W konsekwencji

$$\forall n \geq N : \quad \sqrt[n]{a_n} \geq y \sqrt[n]{a_N y^{-N}}.$$

Ponieważ  $\sqrt[n]{a_N y^{-N}} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ) na mocy Wniosku 3.9.6, więc z Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach  $y \sqrt[n]{a_N y^{-N}} - x \rightarrow y - x > 0$ , a stąd z Twierdzenia 3.3.3 o zachowaniu znaku wynika, że

$$\exists N_1 > N \forall n \geq N_1 : \quad y \sqrt[n]{a_N y^{-N}} - x > 0$$

i wobec przechodności nierówności

$$\forall n \geq N_1 : \quad \sqrt[n]{a_n} > x.$$

Z Własności 3.11.4 wynika, że

$$\beta \geq x.$$

Nierówność po prawej stronie udowadniamy symetrycznie.

Teza dodatkowa wynika z Własności 3.11.2 granicy dolnej i górnej. ■

W tej dodatkowej tezie implikacja przeciwna nie jest prawdziwa.

**Przykład 3.11.8** Niech  $a_n = 2^{-n}(2 + (-1)^n)$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ . Wtedy  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1/2$ , natomiast  $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$  jest rozbieżny.

**Dowód:** Dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2} \sqrt[n]{3} \quad \text{oraz} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{6}(5 - 4(-1)^n).$$

■

**Przykład 3.11.9**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

**Dowód:** Stosujemy Twierdzenie 3.11.7 do ciągu danego wzorem ogólnym

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}^*.$$

Mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e,$$

na mocy Przykładu 3.4.3. Zatem na mocy Twierdzenia 3.11.7

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \rightarrow e.$$

■

## 4 Elementy topologii

### 4.1 Metryka i kule

**Definicja 4.1.1 (Metryka)** Niech  $X$  będzie niepustym zbiorem. Funkcję

$$d : X \times X \ni (a, b) \longmapsto d(a, b) \in [0, +\infty)$$

spełniającą warunki:

- (oznaczoność albo jednoznaczność)  $\forall x, y \in X : (d(x, y) = 0 \iff x = y)$ ;
- (symetria)  $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (nierówność trójkąta)  $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

nazywamy *metryką*. Jeśli  $d$  jest metryką, to  $(X, d)$  nazywamy *przestrzenią metryczną*.

Jeśli wiadomo, o jaką metrykę chodzi, piszemy często  $X$  zamiast  $(X, d)$ .

Jak powiedzieliśmy w Rozdziale 1, jeśli rozważamy

$$d : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \ni (x, y) \longmapsto d(x, y) := |x - y| \in [0, +\infty),$$

to  $(\mathbb{K}, d)$  jest przestrzenią metryczną. Tę metrykę zadaną przez moduł nazywamy *euklidesową*. Jeśli będziemy mówić o przestrzeni metrycznej  $\mathbb{K}$ , to mamy na myśli przestrzeń właśnie z tą metryką. Oczywiście można też zdefiniować inne metryki na  $\mathbb{K}$ , ale ta jest naturalna.

**Definicja 4.1.2 (Metryka i przestrzeń indukowana)** Jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną i zbiór  $A \subset X$  jest niepusty, to  $d|_{A \times A}$  nazywamy metryką *indukowaną* z  $X$  na  $A$ . Przestrzeń metryczną  $(A, d|_{A \times A})$  także nazywamy *indukowaną*.

Czasami będziemy rozważać przestrzenie indukowane z  $\mathbb{R}$ , np.  $\mathbb{Q}$  albo  $(0, +\infty)$  z metryką zadaną przez moduł.

Przypomnijmy odwzorowanie  $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$  rozważane w Rozdziale 1, dane wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|}, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \\ 1, & \text{gdy } x = +\infty \end{cases}.$$

Można pokazać, że jeśli zdefiniujemy

$$d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \ni (x, y) \longmapsto d(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \in [0, +\infty),$$

to  $(\overline{\mathbb{R}}, d)$  jest przestrzenią metryczną (ćwiczenie).

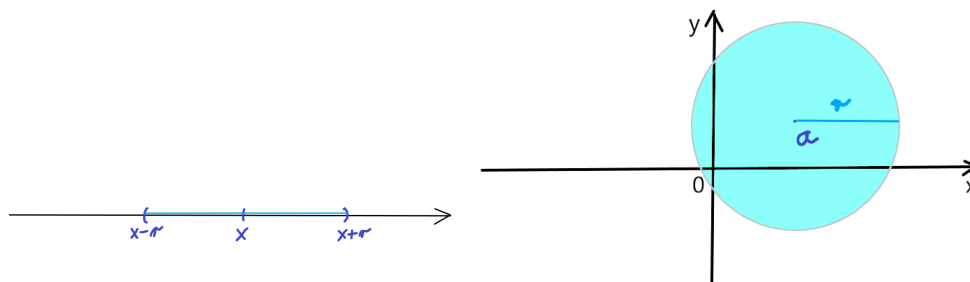
**Definicja 4.1.3 (Kule)** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną,  $x \in X$  i  $r \in (0, +\infty)$ . *Kulę otwartą* o środku  $x$  i promieniu  $r$  nazywamy zbiór

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

*Kulę domkniętą* o tym samym środku i promieniu nazywamy

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Zauważmy, że w  $\mathbb{R}$  kule to przedziały (otwarte to  $(x - r, x + r)$ ), a w  $\mathbb{C}$  kule to koła.



Podzbiór przestrzeni metrycznej nazywamy *ograniczonym*, jeśli zawiera się w pewnej kuli. Ta definicja zgadza się z poprzednimi definicjami zbiorów ograniczonych w  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{C}$ .

Zauważmy, że jeśli rozważymy  $\overline{\mathbb{R}}$  z metryką zadaną powyżej, to cała przestrzeń jest ograniczona, bo zawiera się w kuli o dowolnym środku i promieniu 2.

Rozważmy teraz niepusty zbiór  $A$  i funkcję  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ . Mówimy, że  $f$  jest *ograniczona*, jeśli zbiór  $f(A)$  jest ograniczony. Np.  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest ograniczony, bo  $\sin(\mathbb{R}) \subset (-2, 2)$ ; np.  $f : K(0, 1) \ni z \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$  jest ograniczona, bo  $f(K(0, 1)) \subset K(0, 1)$ .

**Przykład 4.1.4 (Metryka Czebyszewa)** Niech  $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$  oznacza rodzinę wszystkich ograniczonych funkcji  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ . Definiujemy funkcję

$$\begin{aligned} d_C : \mathcal{B}(A, \mathbb{K}) \times \mathcal{B}(A, \mathbb{K}) \ni (f, g) &\mapsto d_C(f, g) := \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| = \\ &= \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}. \end{aligned}$$

Jest to metryka, tak zwana *metryka Czebyszewa*<sup>14</sup>:

**Dowód:** ćwiczenie/zajęcia z topologii. ■

<sup>14</sup>Pafnutij Lwowicz Czebyszow (1821-1894) - matematyk rosyjski

W przestrzeni metrycznej możemy rozważać ciągi, granice ciągów i ciągi Cauchy'ego: Mianowicie, jeśli  $(X, d)$  to przestrzeń metryczna,  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$  (to znaczy mamy odwzorowanie  $\mathbb{N}^* \ni n \mapsto x_n \in X$ ) i  $g \in X$ , to

$$x_n \longrightarrow g \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : d(x_n, g) < \varepsilon.$$

Mówimy wtedy, że ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty$  jest **zbieżny** do  $g$ . Zauważmy, że równoważnie możemy to też zapisać tak

$$x_n \longrightarrow g \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : x_n \in B(g, \varepsilon).$$

**Lemat 4.1.5** *Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną oraz  $x \in X$ . Jeśli  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$  jest taki, że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : x_n \in B(x, 1/n)$ , to  $x_n \longrightarrow x$ .*

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Natomiast  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$  jest **ciągłem Cauchy'ego**, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

W dowolnej przestrzeni metrycznej każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego, to znaczy można wykazać w tym ogólniejszym przypadku Własność 3.6.2. Natomiast przestrzeń metryczna, w której wszystkie ciągi Cauchy'ego są zbieżne, nazywana jest przestrzenią **zupełną**.

Wobec Twierdzenia o zespolonych ciągach Cauchy'ego (Twierdzenie 3.6.5) wiemy, że zarówno  $\mathbb{C}$ , jak i  $\mathbb{R}$  (tu jeszcze potrzebny jest Wniosek 3.1.6) są zupełne.

Natomiast  $(0, +\infty)$  z metryką indukowaną z  $\mathbb{R}$  nie jest zupełna, bo w tej przestrzeni ciąg  $(1/n)_{n=1}^\infty$  jest Cauchy'ego, a nie jest zbieżny. Również  $\mathbb{Q}$  z metryką zadaną przez moduł nie jest zupełna, bo  $\left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n=1}^\infty$  jest ciągiem Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny w  $\mathbb{Q}$ .

## 4.2 Zbiory otwarte i domknięte

**Definicja 4.2.1 (Zbiory otwarte i domknięte)** *Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i  $U, F \subset X$ . Mówimy, że zbiór  $U$  jest **otwarty** (w  $X$ ), jeśli*

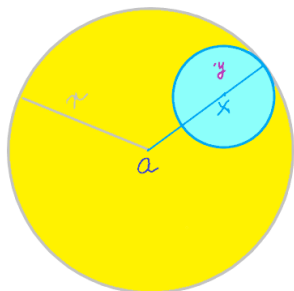
$$\forall x \in U \exists r > 0 : B(x, r) \subset U.$$

*Zbiór  $F$  nazywamy **domkniętym** (domkniętym w  $X$ ), jeśli zbiór  $X \setminus F$  jest otwarty.*

Uwaga! Istnieją zbiory, które nie są ani otwarte ani domknięte. Np. przedział  $(0, 1]$  nie jest ani otwarty ani domknięty w  $\mathbb{R}$  (ćwiczenie).

**Własność 4.2.2** *Kula otwarta jest zbiorem otwartym, a kula domknięta jest zbiorem domkniętym.*

**Dowód:** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną,  $a \in X$ ,  $r > 0$ .

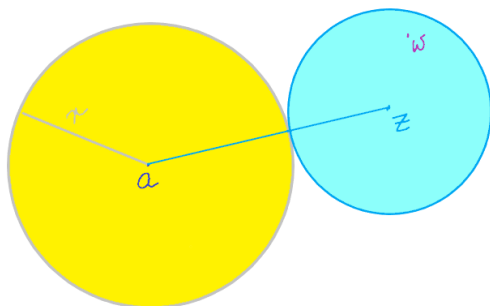


Pokażemy najpierw, że  $B(a, r)$  jest zbiorem otwartym.

Ustalmy dowolny  $x \in B(a, r)$  i weźmy  $y \in B(x, r - d(a, x))$ . Z nierówności trójkąta

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r - d(a, x) + d(x, a) = r,$$

czyli  $y \in B(a, r)$ . Pokazaliśmy, że  $B(x, r - d(a, x)) \subset B(a, r)$ . Z dowolności  $x$  wynika, że  $B(a, r)$  jest zbiorem otwartym.



Pokażemy teraz, że kula  $\overline{B}(a, r)$  jest zbiorem domkniętym, czyli że jej dopełnienie jest zbiorem otwartym.

Ustalmy dowolny  $z \in X \setminus \overline{B}(a, r)$  i weźmy  $w \in B(z, d(a, z) - r)$ . Wtedy z nierówności trójkąta  $d(a, w) + d(w, z) \geq d(a, z)$ , zatem

$$d(a, w) \geq d(a, z) - d(w, z) > d(a, z) - d(a, z) + r = r,$$

zatem  $w \notin \overline{B}(a, r)$ . Pokazaliśmy, że  $B(z, d(a, z) - r) \subset X \setminus \overline{B}(a, r)$ . Z dowolności  $z$  wynika, że  $X \setminus \overline{B}(a, r)$  jest zbiorem otwartym. ■

W szczególności każdy przedział otwarty ograniczony jest zbiorem otwartym. Każde koło otwarte na płaszczyźnie jest zbiorem otwartym.

**Twierdzenie 4.2.3 (Własności zbiorów otwartych i domkniętych)**

Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną. Wtedy:

1.  $\emptyset, X$  są otwarte.
2. Jeśli  $U, V$  są otwarte, to  $U \cap V$  jest otwarty.
3. Jeśli  $\forall i \in I : U_i$  jest otwarty, to  $\bigcup_{i \in I} U_i$  jest otwarty.
4.  $\emptyset, X$  są domknięte.
5. Jeśli  $E, F$  są domknięte, to  $E \cup F$  jest domknięty.
6. Jeśli  $\forall i \in I : F_i$  jest domknięty, to  $\bigcap_{i \in I} F_i$  jest domknięty.

**Dowód:** ćwiczenie/wykład z topologii. ■

W szczególności każdy otwarty przedział niewłaściwy jest otwarty w  $\mathbb{R}$ .

Pokażemy teraz, że zbiory otwarte w przestrzeni indukowanej to ślady zbiorów otwartych z nadprzestrzeni.

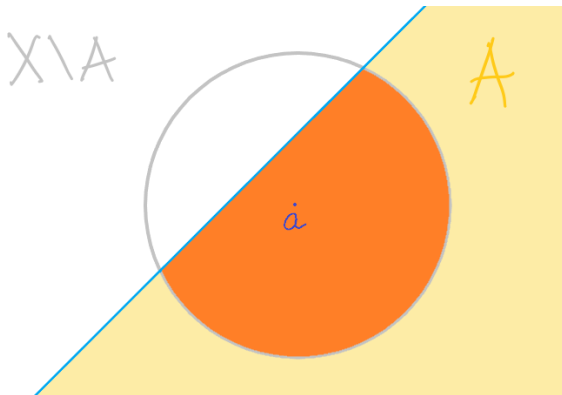
**Własność 4.2.4 (Otwartość i domkniętość w przestrzeni indukowanej)**

Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i  $\emptyset \neq A \subset X$ . Rozważamy metrykę indukowaną na  $A$  z  $X$ . Niech  $D \subset A$ . Wtedy:

- ( $\iota$ )  $D$  jest otwarty w  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki zbiór  $U$  otwarty w  $X$ , że  $D = U \cap A$ .
- ( $\iota$ )  $D$  jest domknięty w  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki zbiór  $F$  domknięty w  $X$ , że  $D = F \cap A$ .

**Dowód:** ( $\iota$ ) Zauważmy najpierw, że jeśli  $a \in A$  i  $r > 0$ , to

$$B_A(a, r) = \{y \in A : d(a, y) < r\} = \{y \in X : d(a, y) < r\} \cap A = B_X(a, r) \cap A.$$



( $\implies$ ) Zbiór  $D$  jest otwarty w  $A$ , to znaczy

$$\forall x \in D \exists r_x > 0 : \quad B_A(x, r_x) \subset D.$$

Rozważmy teraz zbiór

$$U := \bigcup_{x \in D} B_X(x, r_x) = \{y \in X \mid \exists x \in D : d(x, y) < r_x\}.$$

On jest otwarty w  $X$  z Własności 4.2.2 i Twierdzenia 4.2.3 (można to też uzasadnić wprost z definicji wykorzystując rozumowanie z dowodu Własności 4.2.2). Zauważmy, że  $D = U \cap A$ .

( $\impliedby$ ) Niech teraz zbiór  $U$  będzie otwarty w  $X$ , to znaczy

$$\forall x \in U \exists r_x > 0 : \quad B_X(x, r_x) \subset U.$$

W szczególności jeśli  $D = U \cap A$ , to

$$\forall x \in D \exists r_x > 0 : \quad B_X(x, r_x) \subset U.$$

A stąd

$$\forall x \in D \exists r_x > 0 : \quad B_A(x, r_x) = B_X(x, r_x) \cap A \subset U \cap A = D.$$

( $\mu$ ) ćwiczenie/zajęcia z topologii. ■

Na przykład zbiór  $(0, 1]$  nie jest otwarty w  $\mathbb{R}$ , ale jest otwarty w  $[-1, 1]$  z metryką indukowaną z  $\mathbb{R}$ . Ten sam zbiór nie jest domknięty w  $\mathbb{R}$ , ale jest domknięty w  $(0, +\infty)$  z metryką indukowaną z  $\mathbb{R}$ .

#### Własność 4.2.5 (**Suslina**)<sup>15</sup>

Niech  $\{U_\mu : \mu \in M\}$  będzie pewną rodziną parami rozłącznych podzbiorów  $\mathbb{R}$ , które są otwarte i niepuste. Wtedy  $M$  jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

**Dowód:** Pokażemy, że  $M$  jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru  $\mathbb{Q}$ .

Ustalmy dowolne  $\mu \in M$ . Zbiór  $U_\mu$  jest niepusty, zatem istnieje  $x \in U_\mu$ . Ponieważ jest to zbiór otwarty zatem  $(x - \delta, x + \delta) \subset U_\mu$  dla pewnego  $\delta > 0$ . Z Własności 1.4.6 gęstości  $\mathbb{Q}$  w  $\mathbb{R}$  istnieje  $r_\mu \in \mathbb{Q} \cap (x - \delta, x + \delta)$ , w szczególności  $r_\mu \in \mathbb{Q} \cap U_\mu$ . Ustalmy taką liczbę  $r_\mu$ .

Ponieważ zbiory z rodziny  $\{U_\mu : \mu \in M\}$  są parami rozłączne, więc jeśli  $\mu, \nu \in M$  i  $\mu \neq \nu$ , to  $r_\mu \neq r_\nu$ . A to oznacza, że odwzorowanie

$$M \ni \mu \longmapsto r_\mu \in \mathbb{Q}$$

jest injekcją. Zatem zbiór  $M$  jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru liczb wymiernych, czyli jest co najwyżej przeliczalny. ■

<sup>15</sup>Michaił Jakowlewicz Suslin (1896-1919) – matematyk rosyjski

**Definicja 4.2.6 (Otoczenie, sąsiedztwo, punkty skupienia i izolowane)**

Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną,  $A, U, V \subset X$  i  $x \in X$ . Mówimy, że  $U$  jest *otoczeniem* punktu  $x$ , jeśli  $U$  jest otwarty i  $x \in U$ . Mówimy, że  $V$  jest *sąsiedztwem* punktu  $x$ , gdy  $x \notin V$  i  $V \cup \{x\}$  jest otoczeniem punktu  $x$ .

Punkt  $x$  nazywamy punktem *skupienia* zbioru  $A$ , jeśli w każdym sąsiedztwie punktu  $x$  istnieje jakiś element zbioru  $A$ . Jeśli punkt  $x \in A$  nie jest punktem skupienia zbioru  $A$ , to mówimy, że jest *izolowany*.

Podamy kilka przykładów w  $\mathbb{R}$ : Przedział  $(0, 3)$  jest otoczeniem punktu 1, natomiast zbiór  $(0, 1) \cup (1, 3)$  jego sąsiedztwem. Zbiór  $(0, 1)$  nie jest sąsiedztwem 1. Liczba 1 jest punktem skupienia zbiorów  $[0, 1]$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 1) \cup (1, 2)$ . Natomiast 2 jest punktem izolowanym zbioru  $[0, 1] \cup \{2\}$ .

W Definicji 3.11.1 granicy górnej i dolnej ciągu pojawiły się punkty skupienia ciągu. Zauważmy, że to nie to samo, co punkty skupienia zbioru. Ciąg stały  $(c)_{n=1}^{\infty}$  ma punkt skupienia  $c$ , natomiast zbiór  $\{c\}$  nie ma punktów skupienia (punkt  $c$  jest izolowany). Ponadto punktem skupienia ciągu rzeczywistego może być jedna z nieskończoności, a punktem skupienia zbioru może być tylko liczba.

Zauważmy, że dowolny punkt zbioru otwartego w  $\mathbb{K}$  jest jego punktem skupienia. Nie jest to prawda w dowolnej przestrzeni metrycznej. Rozważmy na przykład  $\mathbb{Z}$  z indukowaną metryką z  $\mathbb{R}$ . Wtedy  $\mathbb{Z}$  jest otwarty, ale każdy jego punkt jest izolowany (ćwiczenie). Natomiast każda liczba rzeczywista jest punktem skupienia zbioru  $\mathbb{Q}$ .

**Twierdzenie 4.2.7 (Ciągowe kryterium otwartości i domkniętości)**

Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i  $A \subset X$ . Wtedy:

- (i) Zbiór  $A$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego  $x \in A$  i dowolnego ciągu  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  zbieżnego do  $x$  prawie wszystkie wyrazy tego ciągu leżą w  $A$ .
- (ii) Zbiór  $A$  jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu elementów zbioru  $A$  zbieżnego w  $X$  jego granica należy do  $A$ .

**Dowód:** (i) ćwiczenie.

(ii) ( $\implies$ ) Załóżmy, że  $A$  jest domknięty i pewien ciąg  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$  jest zbieżny do pewnego elementu  $a \in X$ .

Jeśli  $a \notin A$ , to istnieje takie  $r > 0$ , że  $B(a, r) \subset X \setminus A$  (bo  $X \setminus A$  jest otwarty). Ale z definicji granicy stąd  $a_n \in B(a, r)$  dla prawie wszystkich  $n \in \mathbb{N}^*$ , zatem  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  nie jest zawarty w  $A$ .

Przez kontrapozycję, jeśli  $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ , to  $a \in A$ .

( $\impliedby$ ) Kontrapozycja: Jeśli  $A$  nie jest domknięty, to  $X \setminus A$  nie jest otwarty, zatem istnieje  $a \in X \setminus A$ , taki, że

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad B\left(a, \frac{1}{k}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Dla każdego  $k \in \mathbb{N}^*$  ustalmy jeden punkt  $a_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right) \cap A$ . Wtedy ciąg  $(a_k)_{k=1}^\infty \subset A$  jest zbieżny do  $a$ , co wynika wprost z definicji (uzasadnienie – ćwiczenie), ale  $a \notin A$ .

Pokazaliśmy, że jeśli  $A$  nie jest domknięty, to istnieje ciąg zawarty w  $A$  zbieżny do elementu, który nie należy do  $A$ . ■

W szczególności  $\mathbb{Q}$  nie jest domknięty w  $\mathbb{R}$ .

**Własność 4.2.8 (Ciągowa charakteryzacja punktu skupienia)** *Jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną,  $a \in X$  i  $A \subset X$ , to  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\exists (x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$ .*

**Dowód:** ( $\Rightarrow$ ) Z definicji wynika, że

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \quad \left( B\left(a, \frac{1}{k}\right) \setminus \{a\} \right) \cap A \neq \emptyset.$$

Zatem

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \exists x_k \in A \setminus \{a\} : \quad x_k \in B\left(a, \frac{1}{k}\right),$$

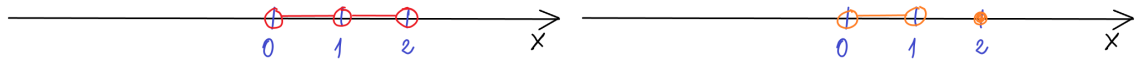
ale to oznacza, że  $x_k \rightarrow a \ (k \rightarrow \infty)$ .

( $\Leftarrow$ ) Niech  $V$  będzie sąsiedztwem punktu  $a$ . Wtedy  $V \cup \{a\}$  jest otoczeniem punktu  $a$ , a stąd wynika, że istnieje takie  $\varepsilon > 0$ , że  $B(a, \varepsilon) \subset V \cup \{a\}$ . Z definicji granicy wynika, że  $\exists n \in \mathbb{N}^* : x_n \in B(a, \varepsilon)$ , ale z założenia  $x_n \in A \setminus \{a\}$ , stąd  $x_n \in V \cap A \neq \emptyset$ . ■

Ten fragment dotyczy tylko  $\mathbb{R}$ :

**Definicja 4.2.9 (Jednostronne punkty skupienia)** *Niech  $A \subset \mathbb{R}$  i  $a \in \mathbb{R}$ . Mówimy, że  $a$  jest **prawostronnym punktem skupienia** zbioru  $A$ , jeśli  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $A \cap (a, +\infty)$ . Natomiast  $a$  jest **lewostronnym punktem skupienia** zbioru  $A$ , jeśli  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $A \cap (-\infty, a)$ .*

Na przykład 1 jest punktem skupienia, lewostronnym punktem skupienia i prawostronnym punktem skupienia zbioru  $(0, 1) \cup (1, 2)$ . 1 jest także punktem skupienia i lewostronnym punktem skupienia zbioru  $(0, 1) \cup \{2\}$ , ale nie jest prawostronnym punktem skupienia tego zbioru.



### 4.3 Wnętrze i domknięcie

**Definicja 4.3.1 (Wnętrze, domknięcie)** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i  $A \subset X$ . *Wnętrzem* zbioru  $A$  nazywamy

$$\text{Int}(A) := \bigcup \{U \text{ otwarty w } X : U \subset A\}.$$

*Domknięciem* zbioru  $A$  nazywamy

$$\overline{A} = \bigcap \{F \text{ domknięty w } X : F \supset A\}.$$

W  $\mathbb{R}$  wnętrzem przedziałów  $[0, 1]$ ,  $(0, 1]$  i  $(0, 1)$  jest  $(0, 1)$ ; domknięciem tych przedziałów jest  $[0, 1]$ . Natomiast  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

Jeśli  $A \subset X$  jest taki, że  $\overline{A} = X$ , to mówimy, że  $A$  jest *gęsty* w  $X$ .

**Własność 4.3.2** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i  $A \subset X$ . Wtedy

- $\text{Int}(A)$  jest zbiorem otwartym;
- $\overline{A}$  jest zbiorem domkniętym;
- $\text{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$ ;
- $A$  jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy  $A = \overline{A}$ ;
- $A$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy  $A = \text{Int}(A)$ .

**Dowód:** Wprost z definicji i z Własności zbiorów otwartych i domkniętych (Twierdzenie 4.2.3) – ćwiczenie/wykład z topologii. ■

#### Własność 4.3.3 (Kryterium otoczeniowe wnętrza i domknięcia)

Jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną,  $x \in X$  i  $A \subset X$ , to

- (i)  $x \in \text{Int}(A) \iff \exists U$  – otoczenie  $x$  :  $U \subset A$ ;  
(ii)  $x \in \overline{A} \iff \forall U$  – otoczenie  $x$  :  $U \cap A \neq \emptyset$ .

**Dowód:** (i)( $\implies$ )  $\text{Int}(A)$  jest zbiorem otwartym wobec Własności 4.3.2, zatem jeśli  $x \in \text{Int}(A)$ , to  $\text{Int}(A)$  może być szukanym otoczeniem.

( $\impliedby$ )  $U$  jest otoczeniem  $x$ , zatem  $x \in U$  i  $U$  jest otwarty. W dodatku  $U \subset A$ , zatem z definicji wnętrza mamy  $U \subset \text{Int}(A)$ , stąd  $x \in \text{Int}(A)$ .

(ii)( $\implies$ ) Niech  $x \in \overline{A}$ .

Założmy, że  $U$  jest zbiorem otwartym takim, że  $A \cap U = \emptyset$ . Wtedy  $A \subset X \setminus U =: F$ . Ponieważ  $U$  jest otwarty, zatem  $F$  jest domknięty, czyli bierzemy go w tej rodzinie z definicji domknięcia. To znaczy  $\overline{A} \subset F$ . A to oznacza, że  $x \in F$ , czyli  $x \notin U$ .

Pokazaliśmy, że jeśli zbiór otwarty jest rozłączny z  $A$ , to nie jest otoczeniem  $x$ . Zatem przez kontrapozycję dowolne otoczenie  $x$  ma niepuste przecięcie z  $A$ .

( $\Leftarrow$ ) Kontrapozycja: Załóżmy, że  $x \notin \overline{A}$ , to znaczy  $x \in W := X \setminus \overline{A}$ . Zbiór  $\overline{A}$  jest domknięty na mocy Własności 4.3.2, zatem  $W$  jest zbiorem otwartym. Ponieważ  $x \in W$ , więc jest to otoczenie punktu  $x$ . Ponadto ponieważ  $A \subset \overline{A}$ , zatem  $A \cap W = \emptyset$ . ■

#### Własność 4.3.4 (Ciągowe kryterium domknięcia)

Jeśli  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną,  $x \in X$  i  $A \subset X$ , to  
 $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A : x_n \rightarrow x$ .

**Dowód:** ( $\Rightarrow$ ) Dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}^*$  kula  $B(x, 1/k)$  jest zbiorem otwartym na mocy Własności 4.2.2, więc jest otoczeniem punktu  $x$ . Na mocy Własności 4.3.3 przecięcie tego otoczenia ze zbiorem  $A$  jest niepuste. Dlatego

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \exists x_k \in A : x_k \in B(x, 1/k),$$

a ten ostatni warunek oznacza, że  $x_k \rightarrow x$  ( $k \rightarrow \infty$ ).

( $\Leftarrow$ ) Ponieważ  $A \subset \overline{A}$ , więc  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \overline{A}$ , a ponieważ  $\overline{A}$  jest domknięty, teza tej implikacji wynika z Ciągowego kryterium domkniętości (Twierdzenie 4.2.7). ■

## 4.4 Zwartość

**Definicja 4.4.1 (Zbiór zwarty)** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i  $K \subset X$ . Mówimy, że  $K$  jest (ciągowo) *zwarty*, jeśli z dowolnego ciągu elementów zbioru  $K$  da się wybrać podciąg zbieżny do elementu zbioru  $K$ .

Na przykład  $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$  jest zwarty (ćwiczenie).

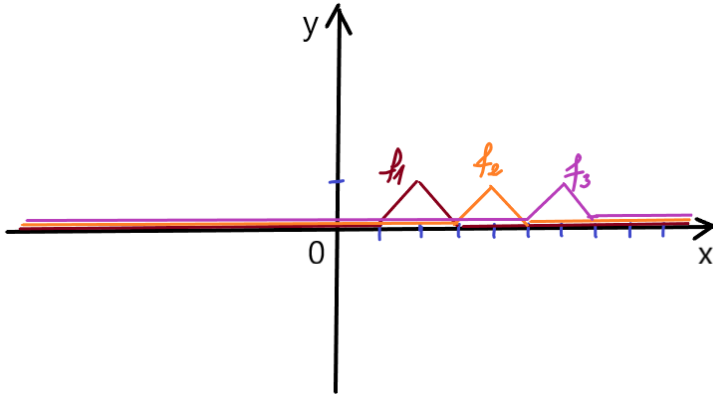
**Własność 4.4.2** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i  $A \subset X$ . Jeśli  $A$  jest zwarty, to  $A$  jest domknięty i ograniczony.

**Dowód:** wykład z topologii. ■

Przeciwna implikacja nie jest prawdziwa. Na przykład w  $(0, +\infty)$  z metryką indukowaną z  $\mathbb{R}$  zbiór  $(0, 1]$  jest ograniczony i domknięty, ale nie jest zwarty, bo żaden podciąg ciągu  $(1/n)_{n=1}^{\infty}$  nie jest zbieżny w  $(0, +\infty)$ . Na przykład także w  $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  z metryką Czebyszewa  $\overline{B}(0, 1)$  nie jest zwarta. Mianowicie żaden podciąg ciągu  $(f_n)_{n=1}^{\infty}$  nie jest nawet ciągiem Cauchy'ego (więc nie jest też zbieżny), jeśli

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus [2n-1, 2n+1] \\ 1 - |x - 2n|, & \text{gdy } x \in [2n-1, 2n+1] \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

bo wtedy  $d_C(f_n, f_k) = 1$ , jeśli  $n \neq k$ .



**Twierdzenie 4.4.3 (Zwartość w  $\mathbb{K}$ )** *Jeśli  $A \subset \mathbb{K}$ , to  $A$  jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

**Dowód:** ( $\implies$ ) Domkniętość:

Będziemy korzystać z Ciągowego kryterium domkniętości (Twierdzenie 4.2.7).

Ustalmy dowolny zbieżny ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$ . Niech  $x$  będzie jego granicą (czyli  $x \in \mathbb{K}$ ). Z definicji zwartości istnieje podciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{L}}$  zbieżny do pewnego elementu  $z \in A$ . Z Twierdzenia 3.5.4 o podciągu ciągu zbieżnego podciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{L}}$  jest zbieżny do  $x$ . Z jedności granicy (Twierdzenie 3.1.3)  $x = z \in A$ .

Z dowolności wyboru ciągu, na mocy Ciągowego kryterium domkniętości (Twierdzenie 4.2.7) zbiór  $A$  jest domknięty.

Ograniczoność: Załóżmy dla dowodu nie wprost, że  $A$  nie jest ograniczony. To znaczy  $\forall n \in \mathbb{N}^* : A \setminus B(0, n) \neq \emptyset$ . Dla każdego  $n \in \mathbb{N}^*$  ustalmy  $x_n \in A \setminus B(0, n)$ . Ponieważ  $A$  jest zwarty, więc istnieje podciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{L}}$  zbieżny do  $x \in A$ . To oznacza, że ten podciąg jest ograniczony na mocy Twierdzenia 3.1.8. W szczególności

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \forall n \in \mathbb{L} : x_n \in B(0, k).$$

Ale z nieskończoności zbioru  $\mathbb{L}$  istnieje takie  $n \in \mathbb{L}$ , że  $n > k$  ( $\implies B(0, k) \subset B(0, n)$ ), a wtedy  $x_n \notin B(0, n)$ , więc również  $x_n \notin B(0, k)$ , sprzeczność.

( $\Leftarrow$ ) Ustalmy dowolny  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$ . Ponieważ  $A$  jest ograniczony, więc ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty$  też jest ograniczony, zatem z Twierdzenia 3.5.7 Bolzana-Weierstrassa lub jego odpowiednika w  $\mathbb{C}$ , czyli Wniosku 3.5.8, istnieje podciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{L}}$  zbieżny do  $x \in \mathbb{K}$ . Ale ponieważ  $A$  jest domknięty, to  $x \in A$  na mocy Ciągowego kryterium domkniętości (Twierdzenie 4.2.7). ■

W szczególności zbiorami zwartymi w  $\mathbb{R}$  są przedziały postaci  $[a, b]$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$  i  $a \leq b$ . W  $\mathbb{C}$  zbiorami zwartymi są  $\overline{K}(a, r)$  dla dowolnego  $a \in \mathbb{C}$  i  $r > 0$ , albo zbiory

postaci  $[a, b] \times [c, d]$  dla dowolnych  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  takich, że  $a \leq b, c \leq d$ . Zbiorami zwartymi są też zbiory postaci  $\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\}$  dla dowolnego ciągu zbieżnego  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ .

**Własność 4.4.4** *Zstępujący ciąg niepustych zbiorów zwartych w  $\mathbb{K}$  ma niepuste przecięcie.*

**Dowód:** Niech  $\forall n \in \mathbb{N}^* : K_n$  będzie zwarty i niepusty oraz  $K_{n+1} \subset K_n$ .

Ustalmy dla każdego  $n \in \mathbb{N}^*$  pewien element  $a_n \in K_n$ . Ponieważ  $(a_n)_{n=1}^\infty \subset K_1$ , więc z definicji zwartości istnieje podciąg  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$  zbieżny do pewnego punktu  $a$ .

Ustalmy dowolne  $n \in \mathbb{N}^*$ . Wtedy  $\forall m \geq n : a_m \in K_n$ . Wobec Twierdzenia 4.4.3 o zwartości w  $\mathbb{K}$  zbiór  $K_n$  jest domknięty. Stąd  $a \in K_n$  z Ciągowego kryterium domkniętości (Twierdzenia 4.2.7). Z dowolności  $n$  wynika, że

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n \neq \emptyset.$$

■

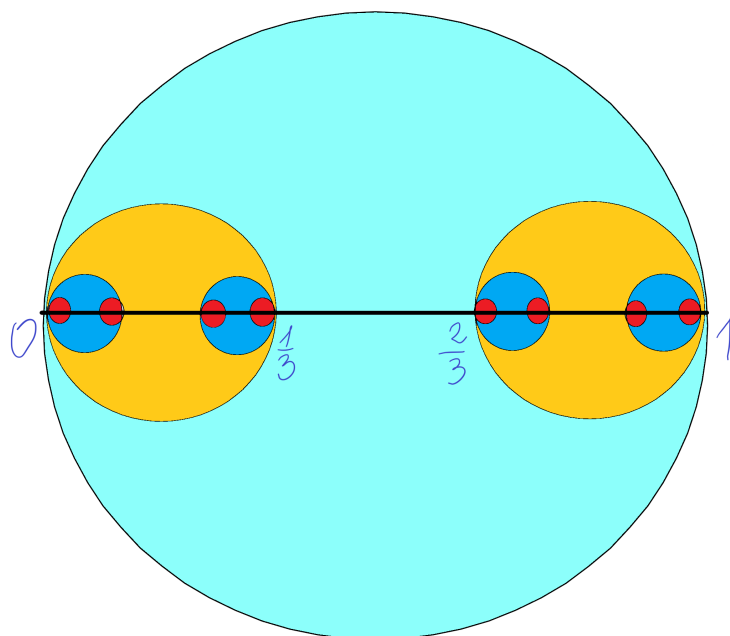
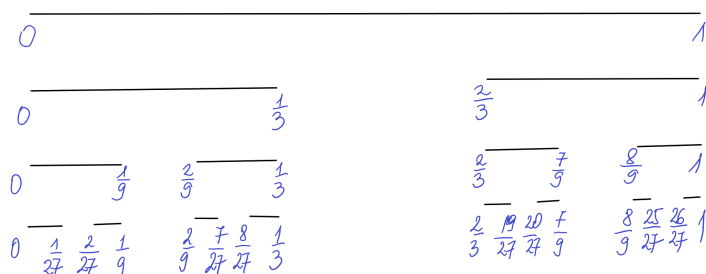
**Przykład 4.4.5** *Niech*

$$\begin{aligned} I_0 &= [0, 1], & K_0 &= \overline{K} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right); \\ I_1 &= \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, 1 \right], & K_1 &= \overline{K} \left( \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \cup \overline{K} \left( \frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right); \\ I_2 &= \left[ 0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[ \frac{2}{9}, \frac{1}{3} \right] \cup \left[ \frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[ \frac{8}{9}, 1 \right], & K_2 &= \bigcup_{j \in \{1, 5, 13, 17\}} \overline{K} \left( \frac{j}{18}, \frac{1}{18} \right); \\ \vdots & & \vdots & \end{aligned}$$

Wtedy  $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$  nazywamy *zbiorem Cantora*. Jest to niepusty zbiór zwarty. Ponadto

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k.$$

**Dowód:**



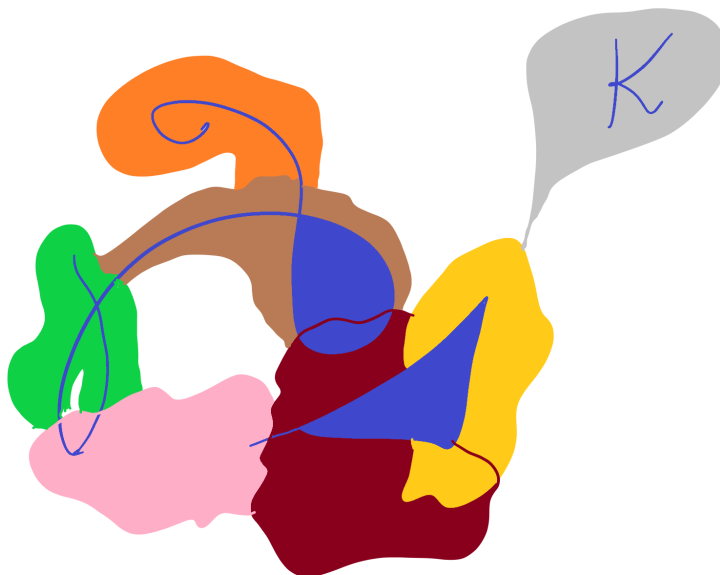
Jest to domknięty (por. Twierdzenie 4.2.3 o własnościach zbiorów domkniętych) i ograniczony podzbiór  $\mathbb{R}$ , zatem zwarty na mocy Twierdzenia 4.4.3. Niepusty na mocy Własności 4.4.4.

Równość  $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k$  – ćwiczenie. ■

**Definicja 4.4.6 (Pokrycie)** *Pokryciem* zbioru  $A$  nazywamy taką rodzinę zbiorów  $\{B_\iota\}_{\iota \in I}$ , że  $A \subset \bigcup_{\iota \in I} B_\iota$ . *Podpokrycie* to podrodzina danego pokrycia, która nadal jest

pokryciem.

Mówimy, że pokrycie  $\{B_\iota\}_{\iota \in I}$  zbioru  $A$  jest *skończone*, jeśli zbiór indeksów  $I$  jest zbiorem skończonym.



Przedstawimy twierdzenie mówiące, że z każdego pokrycia zbioru zwartego zbiorami otwartymi da się wybrać podpokrycie skończone.

Dla zbioru, który nie jest zwarty, nie jest to prawda. Na przykład rodzina przedziałów  $\{(k, k+2) : k \in \mathbb{Z}\}$  jest pokryciem zbioru  $\mathbb{Z}$  (a także zbioru  $\mathbb{Q}$ , czy  $\mathbb{R}$ ) zbiorami otwartymi w  $\mathbb{R}$ , ale nie da się z niej wybrać żadnego mniejszego podpokrycia tego zbioru, bo każda liczba całkowita  $k$  należy do tylko jednego takiego zbioru otwartego, mianowicie do  $(k-1, k+1)$ .

**Własność 4.4.7 (Liczba Lebesgue’a pokrycia)** <sup>16</sup> Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną,  $K \subset X$  będzie zwarty oraz  $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$  będzie rodziną zbiorów otwartych. Jeśli  $K \subset \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$ , to

$$(4.1) \quad \exists \delta > 0 \forall a \in K \exists \iota \in I : B(a, \delta) \subset U_\iota.$$

**Dowód:** Załóżmy dla dowodu nie wprost, że takie  $\delta$  nie istnieje. Stąd wynika, że możemy wybrać taki ciąg  $(a_n)_{n=1}^\infty$  elementów zbioru  $K$ , że  $B\left(a_n, \frac{1}{n}\right)$  nie zawiera

<sup>16</sup>Henri Lebesgue (1875-1941) - matematyk francuski

się w żadnym ze zbiorów  $U_\iota$ . Zbiór  $K$  jest zwarty, zatem z definicji istnieje podciąg  $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$  zbieżny do pewnego elementu  $a \in K$ . Niech  $\iota_0$  będzie takie, że  $a \in U_{\iota_0}$ . Ponieważ jest to zbiór otwarty, więc istnieje takie  $r > 0$ , że  $B(a, r) \subset U_{\iota_0}$ . Z definicji granicy ciągu

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall k \geq N : \quad a_{n_k} \in B\left(a, \frac{r}{2}\right).$$

Ponieważ  $n_k \rightarrow +\infty (k \rightarrow \infty)$ , więc z definicji granicy niewłaściwej ciągu

$$\exists M \geq N : \quad n_M > \frac{2}{r}.$$

A stąd i z nierówności trójkąta dla metryki

$$x \in B\left(a_{n_M}, \frac{1}{n_M}\right) \implies d(x, a) \leq d(x, a_{n_M}) + d(a_{n_M}, a) < \frac{1}{n_M} + \frac{r}{2} < r,$$

czyli  $B\left(a_{n_M}, \frac{1}{n_M}\right) \subset B(a, r) \subset U_{\iota_0}$  – sprzeczność. ■

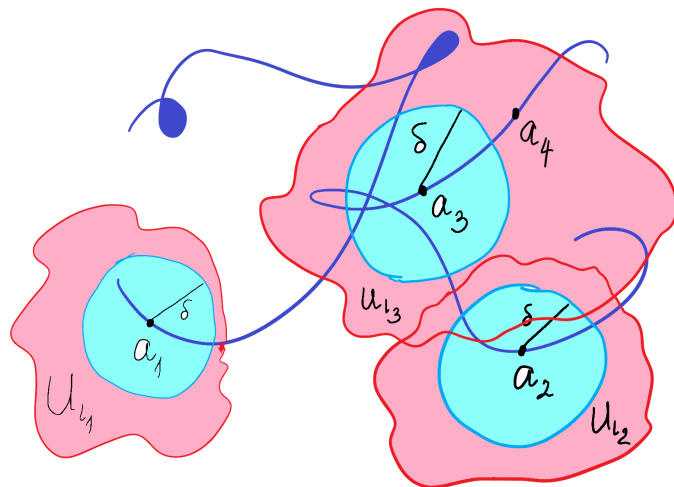
Liczbę  $\delta$  z (4.1) nazywamy **liczbą Lebesgue’a** pokrycia  $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$ .

**Twierdzenie 4.4.8** *Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną,  $K \subset X$  będzie zwarty oraz  $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$  będzie rodziną zbiorów otwartych. Jeśli  $K \subset \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$ , to istnieje  $m \in \mathbb{N}^*$*

*i istnieją takie  $\iota_1, \dots, \iota_m \in I$ , że  $K \subset \bigcup_{k=1}^m U_{\iota_k}$ .*

**Dowód:** Niech  $\delta > 0$  będzie liczbą Lebesgue’a pokrycia  $\{U_\iota\}_{\iota \in I}$ , to znaczy zachodzi wzór (4.1).

Ustalmy dowolne  $a_1 \in K$  i odpowiadający temu punktowi indeks  $\iota_1$  z (4.1). Jeśli  $K \subset B(a_1, \delta)$ , to  $K \subset U_{\iota_1}$  i mamy  $m = 1$ . Jeśli nie, to ustalmy dowolne  $a_2 \in K \setminus B(a_1, \delta)$  i odpowiadający temu punktowi indeks  $\iota_2$  z (4.1)...



Założmy teraz, że mamy wybrane  $a_1, \dots, a_n$  i  $\iota_1, \dots, \iota_n$ . Jeśli  $K \subset \bigcup_{k=1}^n B(a_k, \delta)$ , to  $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_{\iota_k}$ . Jeśli nie mamy tego zawierania, to ustalamy dowolne  $a_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{k=1}^n B(a_k, \delta)$  i odpowiadający temu punktowi indeks  $\iota_{n+1} \in I$  ze wzoru (4.1).

Zauważmy, że  $d(a_n, a_k) \geq \delta$  dla dowolnych  $n \neq k$ . Zatem nie może być to ciąg nieskończony, bo żaden jego podciąg nie byłby Cauchy'ego, a stąd nie byłby zbieżny (odpowiednik Własności 3.6.2 dla ogólniejszego przypadku przestrzeni metrycznej), co byłoby sprzeczne ze zwartością  $K$ . ■

## 4.5 Spójność

**Definicja 4.5.1 (Zbiór spójny)** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną i  $A \subset X$ . Mówimy, że  $A$  jest *niespójny*, jeśli istnieją zbiory  $U, V$  otwarte w  $A$  (jako w przestrzeni indukowanej), rozłączne, niepuste i takie, że  $U \cup V = A$ . W przeciwnym przypadku mówimy, że  $A$  jest *spójny*.

Na przykład zbiór  $\mathbb{Z}$  jest niespójny w  $\mathbb{R}$ , bo  $\mathbb{Z} = ((-\infty, 0) \cap \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \cap (-1, +\infty))$ .

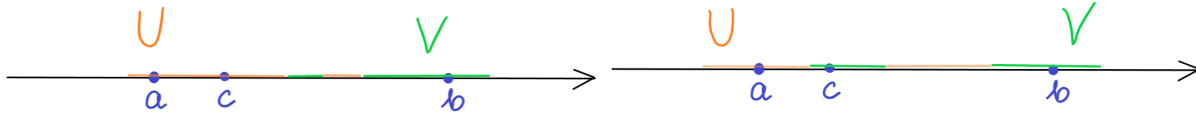
Uwaga: w poniższym twierdzeniu zbiór jednoelementowy  $\{a\} \subset \mathbb{R}$  traktujemy jako przedział  $[a, a]$ .

**Twierdzenie 4.5.2 (O przedziale)** *Jeśli  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ , to  $A$  jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest przedziałem.*

**Dowód:** ( $\Rightarrow$ ) Jeśli  $A$  nie jest przedziałem, to istnieją takie  $a, b \in A$ , że  $a < b$  i istnieje  $c \in (a, b) \setminus A$  (co wynika z Własności 1.5.7 – Charakteryzacji przedziałów oraz Lematu 1.5.2). Niech  $U = A \cap (-\infty, c)$ ,  $V = A \cap (c, +\infty)$ . Wtedy  $U, V$  otwarte w  $A$  jako ślady zbiorów otwartych z  $\mathbb{R}$  (por. Własność 4.2.4), niepuste (bo  $a \in U, b \in V$ ), rozłączne i w sumie dają  $A$ , zatem  $A$  niespójny.

( $\Leftarrow$ ) Niech  $A$  będzie przedziałem i założmy dla dowodu nie wprost, że  $A$  jest niespójny. To znaczy istnieją  $U, V$  otwarte w  $A$ , rozłączne, niepuste i takie, że  $U \cup V = A$ . Niech  $a \in U, b \in V$ . Bez straty ogólności można przyjąć, że  $a < b$ . Ponieważ  $A$  jest przedziałem, więc  $[a, b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0, 1]\} \subset A$  z Charakteryzacji przedziałów (Własność 1.5.7 plus Lemat 1.5.2).

Zdefiniujmy  $B := \{x \in U : x < b\}$ . Jest to zbiór niepusty (bo  $a \in B$ ) i ograniczony od góry przez  $b$ . Zatem na mocy Aksjomatu Dedekinda (Twierdzenie 1.4.9) istnieje  $c := \sup B$ . Mamy  $a \leq c \leq b$ , zatem  $c \in A$  z Charakteryzacji przedziałów (Własność 1.5.7).



I. Jeśli  $c \in U$ , wtedy  $c < b$  (z rozłączności zbiorów  $U$  i  $V$ ), ale ponieważ  $U$  jest otwarty w  $A$ , więc istnieje takie  $\delta \in (0, b - c)$ , że  $[c, c + \delta) \subset U$ , ale wtedy  $c + \frac{\delta}{2} \in B$ , bo należy do  $U$  i jest mniejsza od  $b$ , a większa od  $c$  – to jest sprzeczność z definicją supremum.

II. Jeśli  $c \in V$ , to  $c > a$  i znowu z otwartości  $V$  istnieje takie  $\delta \in (0, c - a)$ , że  $(c - \delta, c] \subset V$ . Ale wtedy  $c - \frac{\delta}{2}$  jest mniejszą majorantą zbioru  $B$ , a to jest sprzeczność z definicją supremum.

Zatem  $A$  jest spójny. ■

**Definicja 4.5.3** *Obszarem nazywamy zbiór otwarty i spójny. Składową spójną zbioru  $A$  nazywamy taki jego spójny podzbiór  $B$ , że każdy zbiór  $C$  taki, że  $B \subsetneq C \subset A$ , jest niespójny.*

Składowa spójna zbioru otwartego jest obszarem.

$\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  i zbiór Cantora są całkowicie niespójne, to znaczy każda ich składowa spójna jest zbiorem jednoelementowym.

## 5 Granica funkcji

Od tej pory  $A \subset \mathbb{K}$ , o ile nie powiemy inaczej. Tak naprawdę mogłoby być na ogół też  $A \subset X$ , gdzie  $X$  jest przestrzenią metryczną.

### 5.1 Definicja Heinego granicy funkcji

17

#### Definicja 5.1.1 (Granica funkcji w sensie Heinego)

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  będzie funkcją, liczba  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  i niech  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Powiemy, że  $\alpha$  jest *granicą* funkcji  $f$  w punkcie  $a$  (piszemy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ), jeśli

$$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

Zauważmy, że ten warunek z definicji nie jest pusto spełniony wobec Charakterystyki ciągowej punktów skupienia (Własność 4.2.8).

#### Przykład 5.1.2

1. Jeśli  $f$  jest funkcją stałą o wartości  $\alpha$  (co możemy zapisać  $f \equiv \alpha$ ), to jej granica w dowolnym punkcie skupienia dziedziny funkcji  $f$  wynosi  $\alpha$ .
2.  $\forall a \in \mathbb{C} : \quad \lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|, \quad \lim_{x \rightarrow a} (-|x|) = -|a|.$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$
4. Nie istnieje  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}.$

**Dowód:** 1. Z definicji Heinego wobec granicy ciągu stałego (zob. Przykład 3.1.2).

2. Ustalmy dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1} \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$  zbieżny do  $a$ . Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji granicy ciągu

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Ale ponieważ z własności modułu (Własność 1.6.1)

$$| -|x_n| - (-|a|) | = ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|,$$

---

<sup>17</sup>Heinrich Eduard Heine (1821-1881) – matematyk niemiecki

więc

$$\forall n \geq N : \quad \left| -|x_n| - (-|a|) \right| = \left| |x_n| - |a| \right| < \varepsilon.$$

A to oznacza z dowolności  $\varepsilon$ , że  $|x_n| \rightarrow |a|$  ( $n \rightarrow \infty$ ) oraz  $-|x_n| \rightarrow -|a|$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Z dowolności ciągu  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  i definicji Heinego zachodzi teza.

3. Na mocy Własności 3.10.9, jeśli  $y_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) i  $\forall n \in \mathbb{N}^* : y_n \neq 0$ , to  $(1 + y_n)^{\frac{1}{y_n}} \rightarrow e$ . Z definicji Heinego zachodzi teza.

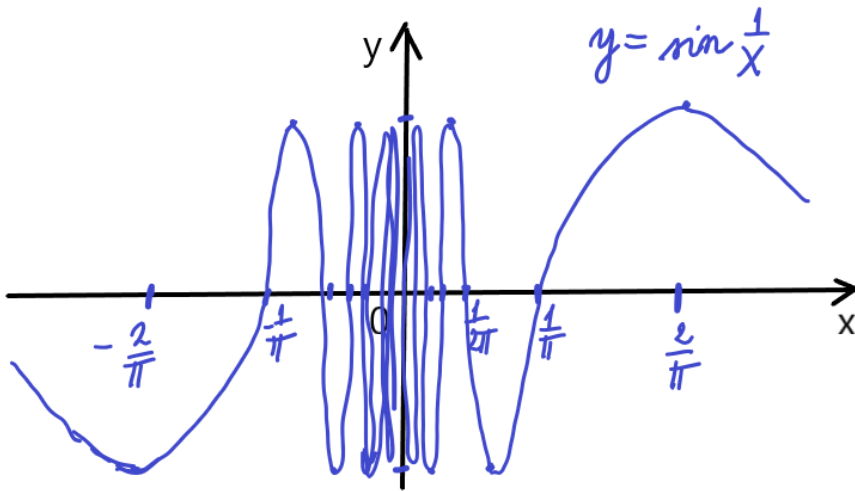
4. Niech

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{i} \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}^*.$$

Wtedy  $x_n \rightarrow 0$  i  $y_n \rightarrow 0$ , natomiast

$$\sin \frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \sin \frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1.$$

Zatem granica nie istnieje z definicji Heinego. ■



**Własność 5.1.3 (Lokalność granicy)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  oraz  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ . Niech  $V$  będzie pewnym sąsiedztwem punktu  $a$ , takim, że  $f|_{A \cap V} \equiv g|_{A \cap V}$  (to znaczy  $\forall x \in A \cap V : f(x) = g(x)$ ). Wtedy  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$ .

**Dowód:** Zbiór  $V$  jest sąsiedztwem punktu  $a$ , zatem  $V \cup \{a\}$  jest otoczeniem  $a$ , a stąd istnieje takie  $r > 0$ , że  $B(a, r) \subset V \cup \{a\}$ .

Ustalmy teraz dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\}$  zbieżny do  $a$ . Z definicji granicy

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \quad |x_n - a| < r,$$

a to oznacza, że  $(x_n)_{n=N}^{\infty} \subset A \cap V$ , czyli  $\forall n \geq N : f(x_n) = g(x_n)$ . Z definicji Heinego  $f(x_n) \rightarrow \alpha$ , zatem również  $g(x_n) \rightarrow \alpha$ .

Z dowolności ciągu i definicji Heinego wynika teza. ■

**Wniosek 5.1.4** *Niech  $A \subset \mathbb{C}$ , niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  i niech  $V$  będzie dowolnym sąsiedztwem punktu  $a$ . W definicji Heinego wystarczy wziąć dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  o wyrazach z  $A \cap V$  zbieżny do  $a$ .*

**Dowód:** To wynika wprost z definicji granicy ciągu, mianowicie z faktu, że prawie wszystkie wyrazy każdego ciągu  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{0\}$  zbieżnego do  $a$  będą w  $A \cap V$ . ■

**Własność 5.1.5** *Jeśli  $A \subset \mathbb{C}$ , liczba  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  i  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ , to  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

**Dowód:** Wprost z definicji Heinego i Wniosku 3.1.6. ■

**Twierdzenie 5.1.6 (o trzech funkcjach)**

*Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ , niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$  oraz  $\forall x \in A \setminus \{a\} : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ .*

*Wtedy  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$ .*

**Dowód:** Definicja Heinego oraz Twierdzenie 3.3.4 o trzech ciągach. ■

**Przykład 5.1.7** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ ;

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ;

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ;

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Dowód:** 1. Mamy

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Teza wynika z Przykładu 5.1.2 i Twierdzenia 5.1.6 o trzech funkcjach.

2. Własność 2.2.1 mówiła, że  $\forall t \in \mathbb{R} : |\sin t| \leq |t|$ . Zatem możemy napisać

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : -|x| \leq \sin x \leq |x|$$

i znowu skorzystać z Przykładu 5.1.2 oraz Twierdzenia 5.1.6 o trzech funkcjach.

3. Ustalmy teraz dowolny  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  zbieżny do 0. Z punktu 2. i z definicji Heinego wynika, że  $\sin \frac{x_n}{2} \rightarrow 0$ , zatem z Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach wnioskujemy, że

$$\cos x_n = 1 - 2 \sin^2 \frac{x_n}{2} \rightarrow 1.$$

Z definicji Heinego (z dowolności ciągu)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

4. Z Własności 2.2.1 wynika, że

$$\forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \quad |\sin t| < |t| < |\operatorname{tg} t|$$

Dla takich  $t$  możemy stronami podzielić przez  $|\sin t|$  (bo jest to liczba dodatnia), otrzymując

$$\forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \quad 1 < \left| \frac{t}{\sin t} \right| < \left| \frac{1}{\cos t} \right|$$

i równoważnie

$$\forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \quad |\cos t| < \left| \frac{\sin t}{t} \right| < 1.$$

Zauważmy, że wyrażenia pod modułami są dodatnie, zatem można opuścić moduły

$$\forall t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \quad \cos t < \frac{\sin t}{t} < 1.$$

i wobec punktu 3. oraz Przykładu 5.1.2 wystarczy zastosować Twierdzenie 5.1.6 o trzech funkcjach. ■

### **Twierdzenie 5.1.8 (O iloczynie funkcji ograniczonej i zbieżnej do 0)**

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ , niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$ , niech  $f$  będzie ograniczona w pewnym sąsiedztwie (w  $A$  z metryką indukowaną) punktu  $a$  oraz  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . Wtedy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ .

**Dowód:** Niech  $V \subset A$  będzie tym sąsiedztwem punktu  $a$ , na którym  $f$  jest ograniczona. Ustalmy dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset V$  zbieżny do  $a$ . Wtedy  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  jest ograniczony. Z definicji Heinego  $g(x_n) \rightarrow 0$ , zatem z Twierdzenia 3.2.5 o iloczynie ciągów ograniczonego i zbieżnego do zera wynika, że  $f(x_n)g(x_n) \rightarrow 0$ .

Z dowolności ciągu  $(x_n)_{n=1}^\infty$  i definicji Heinego (por. Wniosek 5.1.4) teza jest spełniona. ■

### **Twierdzenie 5.1.9 (O zachowaniu nierówności słabej dla funkcji)**

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  oraz istnieją  $\alpha := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  i  $\beta := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Jeśli  $\forall x \in A \setminus \{a\} : f(x) \leq g(x)$ , to  $\alpha \leq \beta$ .

**Dowód:** Wprost z definicji Heinego i Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej dla ciągów. ■

## 5.2 Definicja Cauchy'ego granicy funkcji

### Definicja 5.2.1 (Granica funkcji w sensie Cauchy'ego)

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Powiemy, że  $\alpha$  jest *granica* funkcji  $f$  w punkcie  $a$  (piszemy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ), gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

### Twierdzenie 5.2.2 (Równoważność definicji Cauchy'ego i Heinego)

Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji są równoważne.

**Dowód:** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(Cauchy'ego  $\implies$  Heinego) Ustalmy dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\}$  zbieżny do  $a$ . Wystarczy pokazać, że  $f(x_n) \rightarrow \alpha$ .

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji Cauchy'ego

$$(5.1) \quad \exists \delta > 0 \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Ponieważ  $x_n \rightarrow a$ , zatem z definicji granicy ciągu

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |x_n - a| < \delta.$$

A ponieważ  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\}$ , zatem mamy

$$x_n \in A \quad \text{i} \quad 0 < |x_n - a| < \delta \quad \text{dla } n \geq N.$$

Stąd i z (5.1)

$$\forall n \geq N : |f(x_n) - \alpha| < \varepsilon.$$

Z definicji granicy ciągu wobec dowolności  $\varepsilon > 0$  mamy  $f(x_n) \rightarrow \alpha$ .

(Heinego  $\implies$  Cauchy'ego) Kontrapozycja: Załóżmy, że  $\alpha$  nie jest granicą w sensie Cauchy'ego. Stąd wynika, że

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n \in A : 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad |f(x_n) - \alpha| \geq \varepsilon_0.$$

Zauważmy, że uzyskaliśmy ciąg  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\}$  zbieżny do  $a$  (z Lematu 3.2.2, bo  $|x_n - a| \rightarrow 0$  z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach) i taki, że  $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$  nie jest zbieżny do  $\alpha$ . A wobec tego  $\alpha$  nie jest granicą w sensie Heinego. ■

**Własność 5.2.3 (O niezerowej granicy)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  i istnieje  $\alpha := \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ . Wtedy istnieje takie sąsiedztwo  $V$  punktu  $a$  w  $A$  i liczba  $m > 0$ , że  $\forall x \in V : |f(x)| > m$ . W szczególności  $\forall x \in V : f(x) \neq 0$ .

**Dowód:** Z definicji Cauchy'ego dla liczby  $|\alpha|/2 > 0$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}.$$

Zatem jeśli  $V := \{x \in A : 0 < |x - a| < \delta\}$ , to  $V$  jest sąsiedztwem  $a$  w  $A$  oraz

$$\forall x \in V : |f(x) - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}.$$

Ale z nierówności trójkąta dla modułu  $|\alpha| - |f(x)| \leq |f(x) - \alpha|$ , zatem

$$\forall x \in V : |f(x)| > \frac{|\alpha|}{2}.$$

■

**Własność 5.2.4 (O znaku funkcji w sąsiedztwie punktu skupienia)**

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  i istnieje  $\alpha := \lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$  (odp.  $< 0$ ). Wtedy istnieje takie sąsiedztwo  $V$  punktu  $a$  w  $A$ , że  $\forall x \in V : f(x) > 0$  (odp.  $< 0$ ).

**Dowód:** Z definicji Cauchy'ego dla liczby  $\alpha/2 > 0$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \frac{\alpha}{2}.$$

Zatem jeśli  $V := \{x \in A : 0 < |x - a| < \delta\}$ , to  $V$  jest sąsiedztwem  $a$  w  $A$  oraz

$$\forall x \in V : |f(x) - \alpha| < \frac{\alpha}{2}.$$

Ale z definicji modułu  $\alpha - f(x) \leq |f(x) - \alpha|$ , zatem

$$\forall x \in V : f(x) > \frac{\alpha}{2}.$$

■

**Twierdzenie 5.2.5 (O działaniach na granicach funkcji)**

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  oraz istnieją  $\alpha := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  i  $\beta := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Wtedy

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta;$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \alpha\beta;$
3. Jeśli ponadto  $\beta \neq 0$ , to  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}.$

**Dowód:** 1., 2. Stosujemy definicję Heinego i Twierdzenie 3.2.7 o działaniu na granicach ciągów.

3. Stosujemy najpierw Własność 5.2.3 niezerowej granicy do funkcji  $g$  i otrzymujemy sąsiedztwo  $V$  punktu  $a$  w  $A$ , w którym  $g$  nie przyjmuje wartości zero. I teraz stosujemy definicję Heinego w tym sąsiedztwie (por. Wniosek 5.1.4) i Twierdzenie 3.2.7 o działaniu na granicach ciągów. ■

### Twierdzenie 5.2.6 (O granicach wykładniczych)

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Niech  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$  oraz istnieją  $\alpha := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  i  $\beta := \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Jeśli zachodzi jeden z warunków

1.  $\alpha > 0$ ,

2.  $f$  jest dodatnia w pewnym sąsiedztwie punktu  $a$ ,  $\alpha = 0$  i  $\beta > 0$ ,

to  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \alpha^\beta.$

**Dowód:** Zauważmy najpierw, że  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  wobec Własności 5.1.5.

W przypadku  $\alpha > 0$  stosujemy Własność 5.2.4 mówiącą o znaku funkcji. A potem w obu przypadkach stosujemy definicję Heinego oraz Twierdzenie 3.10.8 o ciągach wykładniczych. ■

## 5.3 Granice jednostronne

Ten podrozdział dotyczy tylko i wyłącznie  $A \subset \mathbb{R}$ .

### Definicja 5.3.1 (Granica jednostronna w sensie Cauchy'ego)

Niech  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Jeśli  $a$  jest prawostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest *prawostronną granicą* funkcji  $f$  w punkcie  $a$  (piszemy  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$ ), gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Jeśli  $a$  jest lewostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest *lewostronną granicą* funkcji  $f$  w punkcie  $a$  (piszemy  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \alpha$ ), gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

**Definicja 5.3.2 (Granica jednostronna w sensie Heinego)**

Niech  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Jeśli  $a$  jest prawostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest **prawostronną granicą** funkcji  $f$  w punkcie  $a$  (piszemy  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$ ), gdy

$$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \cap (a, +\infty) : \quad x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow \alpha.$$

Jeśli  $a$  jest lewostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to mówimy, że  $\alpha$  jest **lewostronną granicą** funkcji  $f$  w punkcie  $a$  (piszemy  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \alpha$ ), gdy

$$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \cap (-\infty, a) : \quad x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow \alpha.$$

**Twierdzenie 5.3.3** Definicje granic jednostronnych Heinego i Cauchy'ego są równoważne.

**Dowód:** analogicznie do dowodu Twierdzenia 5.2.2 o równoważności definicji granic Heinego i Cauchy'ego (ćwiczenie). ■

**Przykład 5.3.4** 1. Funkcja signum

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} -1, & \text{gdy } x < 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \\ 1, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

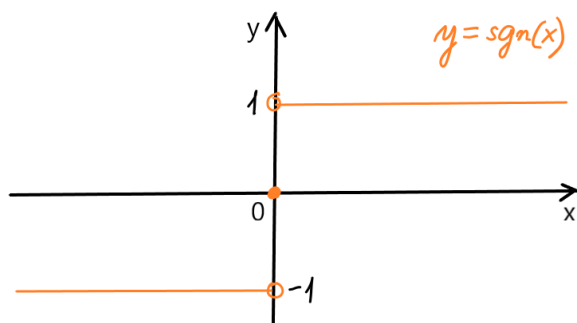
ma w 0 prawostronną granicę równą 1 i lewostronną granicę równą  $-1$ .

2. Funkcja

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \sin \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$$

nie ma ani lewostronnej ani prawostronnej granicy w 0.

**Dowód:**



Por. Przykład 5.1.2. ■

**Twierdzenie 5.3.5 (Związek granicy z granicami jednostronnymi)**

Niech  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Jeśli  $a$  jest zarówno lewostronnym jak i prawostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \iff \left( \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \alpha \right).$$

**Dowód:** Będziemy korzystać z definicji Heinego.

( $\Rightarrow$ ) Jeśli ustalimy dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \cap (a, +\infty)$  zbieżny do  $a$ , to  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$ , zatem wprost z definicji Heinego  $f(x_n) \rightarrow \alpha$ . Symetrycznie, jeśli ustalimy dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \cap (-\infty, a)$  zbieżny do  $a$ , to  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$  i znowu mamy zbieżność ciągu wartości.

( $\Leftarrow$ ) Ustalmy dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$  zbieżny do  $a$ . Chcemy pokazać z definicji Heinego, że ciąg  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny do  $\alpha$ .

Ustalmy dowolny jego podciąg  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{L}}$ . Definiujemy  $\mathbb{L}_- := \{n \in \mathbb{L} : x_n < a\}$  i  $\mathbb{L}_+ := \{n \in \mathbb{L} : x_n > a\}$ . W sumie te zbiory dają nieskończony zbiór  $\mathbb{L}$ , więc przynajmniej jeden z nich jest nieskończony. Jeśli  $\mathbb{L}_-$  jest nieskończony, to z faktu, że  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \alpha$ , podciąg  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{L}_-}$  jest zbieżny do  $\alpha$ . Jeśli  $\mathbb{L}_-$  jest skończony, to  $\mathbb{L}_+$  jest nieskończony i symetrycznie korzystamy z granicy prawostronnej.

Na mocy Twierdzenia 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach  $f(x_n) \rightarrow \alpha$ . ■

## 5.4 Ciągłość w punkcie

### Definicja 5.4.1 (Ciągłość w punkcie w sensie Cauchy'ego)

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in A$ . Mówimy, że  $f$  jest *ciągła* w punkcie  $a$ , gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Zauważmy, że o ciągłości lub nieciągłości funkcji w punkcie możemy mówić tylko wtedy, gdy ten punkt należy do dziedziny tej funkcji.

**Wniosek 5.4.2** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ . Jeśli  $a$  jest punktem izolowanym zbioru  $A$ , to dowolna funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  jest ciągła w  $a$ .

**Dowód:** Z definicji punktu izolowanego istnieje takie sąsiedztwo  $V$  punktu  $a$ , że  $V \cap A = \{a\}$ . Zbiór  $V \cup \{a\}$  jest otoczeniem punktu  $a$ , zatem istnieje takie  $\delta > 0$ , że  $B(a, \delta) \subset V \cup \{a\}$ . Zatem  $B(a, \delta) \cap A = \{a\}$ .

Stąd jeśli  $x \in A$  i  $|x - a| < \delta$ , to  $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$  dla dowolnego  $\varepsilon > 0$ .

Znaleźliśmy zatem jedną liczbę  $\delta$  dobrą dla każdego  $\varepsilon$ . ■

**Definicja 5.4.3 (Otoczeniowa definicja ciągłości w punkcie)**

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in A$ . Mówimy, że  $f$  jest *ciągła* w punkcie  $a$ , gdy dla każdego otoczenia  $W$  punktu  $f(a)$  istnieje takie otoczenie  $U$  punktu  $a$ , że  $f(U \cap A) \subset W$ .

**Twierdzenie 5.4.4 (Równoważność definicji Cauchy'ego i otoczeniowej)**

Definicje ciągłości otoczeniowa i Cauchy'ego są równoważne.

**Dowód:** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  i  $a \in A$ .

(Cauchy'ego  $\implies$  otoczeniowa) Ustalmy dowolne otoczenie  $W$  punktu  $f(a)$ . Z definicji otoczenia istnieje takie  $\varepsilon > 0$ , że  $B(f(a), \varepsilon) \subset W$ . Do tego  $\varepsilon$  dobieramy  $\delta > 0$  z definicji Cauchy'ego. Niech  $U := B(a, \delta)$ . Jeśli  $x \in U \cap A$ , to  $x \in A$  oraz  $|x - a| < \delta$ , zatem z definicji Cauchy'ego  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ , a stąd  $f(x) \in W$ . Pokazaliśmy, że  $f(U \cap A) \subset W$ .

(otoczeniowa  $\implies$  Cauchy'ego) Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Kula  $W = B(f(a), \varepsilon)$  jest otoczeniem punktu  $f(a)$ . Zatem z definicji otoczeniowej istnieje takie otoczenie  $U$  punktu  $a$ , że  $f(U \cap A) \subset W$ .  $U$  jest otoczeniem, zatem istnieje takie  $\delta > 0$ , że  $B(a, \delta) \subset U$ , a to oznacza, że jeśli  $x \in A$  i  $|x - a| < \delta$ , to  $f(x) \in W$ . Równoważnie możemy zapisać  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . ■

**Twierdzenie 5.4.5 (Związek między ciągłością i granicą)**

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  i niech  $a \in A$ . Jeśli  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ , to  $f$  jest ciągła w  $a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Dowód:** Skorzystamy z definicji Cauchy'ego obu pojęć. Napiżmy te dwa warunki jeden pod drugim:

$$\begin{aligned} (\text{ciągłość}) \quad & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon; \\ (\text{granicę}) \quad & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wtedy implikacja ( $\Downarrow$ ) jest natychmiastowa (bo w definicji granicy mocniejsze założenie implikacji).

( $\Uparrow$ ) Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Dobieramy  $\delta$  z definicji Cauchy'ego granicy funkcji.

Niech teraz  $x \in A$  będzie takie, że  $|x - a| < \delta$ . Jeśli  $x \neq a$ , to  $0 < |x - a| < \delta$ , zatem z warunku dla granicy (naszego założenia w tej implikacji) wynika, że  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ . Natomiast jeśli  $x = a$ , to  $f(x) = f(a)$ , zatem  $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ . ■

**Definicja 5.4.6 (Ciągłość w punkcie w sensie Heinego)**

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in A$ . Mówimy, że  $f$  jest *ciągła* w punkcie  $a$ , gdy

$$\forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A : \quad x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a).$$

**Twierdzenie 5.4.7 (Równoważność definicji Heinego i Cauchy’ego)**

*Definicje Heinego i Cauchy’ego ciągłości w punkcie są równoważne.*

**Dowód:** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  i  $a \in A$ .

I. Pokażemy najpierw, że jeśli  $a$  jest izolowany, to  $f$  jest ciągła w  $a$  w sensie Heinego.

Ustalmy dowolny  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$  zbieżny do  $a$ . Z definicji punktu izolowanego istnieje takie sąsiedztwo  $V$  punktu  $a$ , że  $V \cap A = \emptyset$ . Zbiór  $V \cup \{a\}$  jest otoczeniem  $a$ , zatem istnieje takie  $r > 0$ , że  $B(a, r) \subset V \cup \{a\}$ . Mamy stąd  $B(a, r) \cap A = \{a\}$ .

Ponieważ  $x_n \rightarrow a$ , zatem z definicji granicy ciągu

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |x_n - a| < r,$$

inaczej mówiąc  $\forall n \geq N : x_n \in A \cap B(a, r)$ , a to oznacza, że  $x_n = a$  dla  $n \geq N$ . Stąd  $\forall n \geq N : f(x_n) = f(a)$ , czyli od pewnego miejsca ciąg  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  jest stały, stale równy  $f(a)$ , a stąd  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

II. Niech teraz  $a$  będzie punktem skupienia zbioru  $A$ . Korzystając z Twierdzenia 5.4.5 o związku między ciągłością a granicą i Twierdzenia 5.2.2 o równoważności definicji granicy w sensie Cauchy’ego i Heinego wystarczy pokazać, że w tym wypadku definicja Heinego ciągłości i definicja Heinego granicy są równoważne.

Napiszmy oba warunki jeden pod drugim:

$$\begin{aligned} (\text{ciągłość}) \quad & \forall (x_n)_{n=1}^\infty \subset A : x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a); \\ (\text{granica}) \quad & \forall (x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a). \end{aligned}$$

( $\Downarrow$ ) W przypadku definicji granicy bierzemy ciągi w  $A \setminus \{a\}$ , zatem szczególny przypadek ciągu w  $A$ , dlatego z definicji ciągłości wynika definicja granicy.

( $\Uparrow$ ) Ustalmy teraz dowolny  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$  zbieżny do  $a$ . Ustalmy dowolny podciąg  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{L}}$  ciągu  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ .

Definiujemy  $\mathbb{L}_1 := \{n \in \mathbb{L} : x_n \neq a\}$  i  $\mathbb{L}_2 := \{n \in \mathbb{L} : x_n = a\}$ . Któryś z nich musi być nieskończony, bo w sumie dają nieskończony zbiór  $\mathbb{L}$ .

Jeśli  $\mathbb{L}_1$  jest nieskończony, to  $(x_n)_{n \in \mathbb{L}_1} \subset A \setminus \{a\}$ , a na mocy Twierdzenia 3.5.4 o granicy podciągu jest to ciąg zbieżny do  $a$ . Z definicji granicy Heinego funkcji  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{L}_1}$  jest zbieżny do  $f(a)$ .

Jeśli natomiast  $\mathbb{L}_1$  jest skończony, to  $\mathbb{L}_2$  jest nieskończony, ale wtedy podciąg  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{L}_2}$  jest stały, stale równy  $f(a)$ , zatem także zbieżny do  $f(a)$ . Z Twierdzenia 3.5.5 Cauchy’ego o podciągach mamy  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . ■

**Przykład 5.4.8 Funkcja Dirichleta<sup>18</sup>**

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

<sup>18</sup>Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) – matematyk niemiecki

nie jest ciągła w żadnym punkcie  $a \in \mathbb{R}$ .

**Dowód:** Niech  $a \in \mathbb{R}$ . Na mocy Lematu 3.3.6 istnieje  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{Q}$  zbieżny do  $a$ . Zdefiniujmy

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad y_n = x_n + \frac{\pi}{n}.$$

Wtedy  $(y_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Wobec Przykładu 3.1.2 i Twierdzenia 3.2.7 o działaniach na granicach ciąg  $(y_n)_{n=1}^\infty$  też jest zbieżny do  $a$ . Mamy  $f(x_n) = 1 \rightarrow 1$ ,  $f(y_n) = 0 \rightarrow 0$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ . Zatem z definicji Heinego  $f$  nie jest ciągła w  $a$ . ■

**Własność 5.4.9 (Lokalność ciągłości w punkcie)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in A$  oraz niech  $f$  będzie ciągła w  $a$ . Jeśli istnieje takie otoczenie  $U$  punktu  $a$  w  $A$ , że  $\forall x \in U : f(x) = g(x)$ , to  $g$  też jest ciągła w  $a$ .

**Dowód:** ćwiczenie. ■

## 5.5 Operacje na funkcjach ciągłych w punkcie

**Twierdzenie 5.5.1 (O działaniach na funkcjach ciągłych)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in A$  oraz niech  $f$  i  $g$  będą ciągłe w  $a$ . Wtedy:

1.  $f + g$  jest ciągła w  $a$ ;
2.  $fg$  jest ciągła w  $a$ ;
3. Jeśli ponadto  $\forall x \in A : g(x) \neq 0$ , to  $\frac{f}{g}$  jest ciągła w  $a$ .

**Dowód:** Definicja Heinego ciągłości i Twierdzenie 3.2.7 o działaniach na granicach ciągów. ■

**Twierdzenie 5.5.2 (O funkcjach wykładniczych)**

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in A$  oraz niech  $f$  i  $g$  będą ciągłe w  $a$ . Wtedy  $f^g : A \ni x \mapsto (f(x))^{g(x)} \in \mathbb{R}$  jest ciągła w  $a$ .

**Dowód:** Definicja Heinego ciągłości i Twierdzenie 3.10.8 o ciągach wykładniczych. ■

**Twierdzenie 5.5.3 (O złożeniu funkcji ciągłych)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  i  $B \subset \mathbb{C}$  będzie taki, że  $f(A) \subset B$ . Niech  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in A$ . Jeśli  $f$  jest ciągła w  $a$  oraz  $g$  jest ciągła w  $f(a)$ , to  $g \circ f$  jest ciągła w  $a$ .

**Dowód:** Ustalmy dowolny  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$  zbieżny do  $a$ . Wtedy  $(f(x_n))_{n=1}^\infty \subset B$  i z definicji Heinego ciągłości dla funkcji  $f$  mamy  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Jeszcze raz z definicji Heinego ciągłości tym razem dla funkcji  $g$  wnioskujemy, że  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$  ( $n \rightarrow \infty$ ). ■

## 5.6 Ciągłość na zbiorze

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  i  $B \subset A$ . Mówimy, że  $f$  jest **ciągła na  $B$** , jeśli  $\forall a \in B : f$  jest ciągła w  $a$ . Mówimy, że  $f$  jest **ciągła**, jeśli jest ciągła na  $A$ .

Funkcja signum nie jest ciągła w 0 (zob. Przykład 5.3.4). Natomiast jest ciągła na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Moduł jest funkcją ciągłą (zob. Przykład 5.1.2 i Twierdzenie 5.4.5).

Zbiór wszystkich funkcji ciągłych na  $A$  o wartościach w  $\mathbb{K}$  oznaczamy symbolem  $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ . Jeśli mamy ustalone ciało, to piszemy też często  $\mathcal{C}(A)$ .

### Przykład 5.6.1 (Ciągłość pewnych funkcji elementarnych)

1. *Każdy wielomian jest funkcją ciągłą.*
2. *Funkcja wymierna jest ciągła.*
3. *Niech  $k \in \mathbb{N}^*$  będzie parzysta. Funkcja  $[0, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt[k]{x} \in \mathbb{R}$  jest ciągła.*
4. *Niech  $k \in \mathbb{N}^*$  będzie nieparzysta. Funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt[k]{x} \in \mathbb{R}$  jest ciągła.*
5. *Funkcja niewymierna jest ciągła.*
6. *Niech  $a > 0$ . Funkcja wykładnicza  $\mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$  jest ciągła.*
7. *Funkcje trygonometryczne są ciągłe.*

**Dowód:** Na ogół wykorzystamy tu definicję Heinego ciągłości i pewne twierdzenia o ciągach.

1, 2. Z definicji Heinego i Własności 3.9.2 zbieżności potęg naturalnych wielomian  $x \mapsto x^k$  jest ciągły dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}^*$ . Funkcja stała jest też ciągła. Wystarczy zastosować Twierdzenie 5.5.1 o działaniach na funkcjach ciągłych.

3. Z Własności 3.9.4 zbieżności pod pierwiastkiem.

4. Jeśli  $a > 0$ , to ciągłość w  $a$  wynika z Własności 3.9.4 zbieżności pod pierwiastkiem. Niech teraz  $a < 0$ , wtedy z lokalności ciągłości wystarczy zauważyć, że  $x \mapsto \sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{-x}$  jest ciągła w  $a$  z przypadku dotyczącego liczb dodatnich oraz z Twierdzenia 5.5.1 o działaniach na funkcjach ciągłych i Twierdzenia 5.5.3 o złożeniu funkcji ciągłych. W  $a = 0$  liczymy granice jednostronne i stosujemy Twierdzenie 5.3.5 o granicy i granicach jednostronnych i Twierdzenie 5.4.5 o związku między ciągłością i granicą.

5. Z punktów poprzednich, z Twierdzenia 5.5.1 o działaniach na funkcjach ciągłych oraz Twierdzenia 5.5.3 o złożeniu funkcji ciągłych.

6. Z punktu 1. oraz Twierdzenia 5.5.2 o funkcjach wykładniczych.

7. Niech  $a \in \mathbb{R}$ . Z tożsamości trygonometrycznych, Przykładu 5.1.7, Twierdzenia 5.4.5 o związku granicy z ciągłością, Twierdzenia 5.5.1 o działaniach na funkcjach ciągłych i Twierdzenia 5.5.3 o złożeniu funkcji ciągłych otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \lim_{x \rightarrow a} [\sin(x-a) \cos a + \cos(x-a) \sin a] = 0 \cdot \cos a + 1 \cdot \sin a = \sin a,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \lim_{x \rightarrow a} [\cos(x-a) \cos a - \sin(x-a) \sin a] = 1 \cdot \cos a - 0 \cdot \sin a = \cos a,$$

co daje ciągłość funkcji sinus i cosinus. Stąd funkcje tangens i cotangens są ciągłe na mocy Twierdzenia 5.5.1 o działaniach na funkcjach ciągłych. ■

**Przykład 5.6.2** Funkcja  $f : [0, 1] \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$  dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

jest wypukła i nieciągła.

**Dowód:** ćwiczenie. ■

**Twierdzenie 5.6.3 (Warunek wystarczający wypukłości dla funkcji ciągłych)**

Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem, funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła oraz

$$\forall a, b \in A : \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2},$$

to  $f$  jest wypukła.

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $a, b \in A$  i niech

$$M := \{t \in [0, 1] : f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)\}.$$

$M \neq \emptyset$ , bo  $0, 1, 1/2 \in M$ .

Ustalmy teraz dowolne  $s, t \in M$  takie, że  $s \leq t$ . W szczególności  $s, t \in [0, 1]$  oraz  $u := \frac{s+t}{2} \in [0, 1]$ . Ponieważ  $A$  jest przedziałem, z Charakteryzacji przedziałów (Własność 1.5.7) wynika, że  $(1-s)a + sb \in A$ ,  $(1-t)a + tb \in A$  oraz  $(1-u)a + ub \in A$ .

Policzmy korzystając z założenia i definicji  $M$

$$\begin{aligned} f((1-u)a + ub) &= f\left(\frac{(1-s)a + sb + (1-t)a + tb}{2}\right) \leq \\ &\leq \frac{f((1-s)a + sb) + f((1-t)a + tb)}{2} \leq \\ &\leq \frac{(1-s)f(a) + sf(b) + (1-t)f(a) + tf(b)}{2} = \\ &= \left(1 - \frac{s+t}{2}\right) f(a) + \frac{s+t}{2} f(b) = (1-u)f(a) + uf(b). \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że

$$\forall s, t \in M : \quad \frac{s+t}{2} \in M,$$

a stąd wynika, że

$$\forall n, k \in \mathbb{N} : \quad k \leq 2^n \implies \frac{k}{2^n} \in M.$$

Rozważmy teraz funkcję

$$h : [0, 1] \ni t \longmapsto h(t) := f((1-t)a + tb) - (1-t)f(a) - tf(b) \in \mathbb{R}.$$

$h$  jest funkcją ciągłą na mocy Twierdzenia 5.5.3 o złożeniu funkcji ciągłych (bo  $f$  jest ciągła i liniowe są ciągłe). Z definicji zbioru  $M$  wynika, że  $h|_M \leq 0$ .

Ustalmy teraz dowolne  $w \in [0, 1]$ . Niech  $k_n := [2^n w]$ . Wtedy  $k_n \in \mathbb{N}$ . Ponadto  $2^n w - 1 < k_n \leq 2^n w \leq 2^n$  na mocy (2.2), a stąd

$$w - \frac{1}{2^n} < \frac{k_n}{2^n} \leq w.$$

W szczególności  $2^{-n}k_n \longrightarrow w (n \rightarrow \infty)$  z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach.

Stąd z ciągłości funkcji  $h$ , definicji Heinego ciągłości i Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej w granicy

$$h(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(2^{-n}k_n) \leq 0,$$

bo  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2^{-n}k_n \in M$ . ■

#### **Twierdzenie 5.6.4 (Kryterium ciągłości)**

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

- (i) Funkcja  $f$  jest ciągła;
- (ii) Jeśli  $U$  jest zbiorem otwartym w  $\mathbb{K}$ , to  $f^{-1}(U)$  jest zbiorem otwartym w  $A$ ;
- (iii) Jeśli  $F$  jest zbiorem domkniętym w  $\mathbb{K}$ , to  $f^{-1}(F)$  jest zbiorem domkniętym w  $A$ .

**Dowód:** (i)  $\implies$  (ii) Ustalmy dowolny zbiór  $U$  otwarty w  $\mathbb{K}$  i dowolny punkt  $a \in f^{-1}(U)$ . Z definicji przeciwbrazu  $f(a) \in U$ , a wobec tego  $U$  jest otoczeniem  $f(a)$ . Z definicji otoczeniowej ciągłości istnieje takie otoczenie  $W$  punktu  $a$ , że  $f(W \cap A) \subset U$ .  $W$  jest otwarty, zatem  $\exists r > 0 : B(a, r) \subset W$ . Stąd  $f(B(a, r) \cap A) \subset f(W \cap A) \subset U$ . Z własności przeciwbrazu

$$B(a, r) \cap A \subset f^{-1}(f(B(a, r) \cap A)) \subset f^{-1}(U).$$

Z dowolności  $a$  pokazaliśmy, że  $f^{-1}(U)$  jest otwarty w  $A$ .

(ii)  $\implies$  (iii) Ustalmy dowolny zbiór  $F$  domknięty w  $\mathbb{K}$ . Wtedy  $U := \mathbb{K} \setminus F$  jest otwarty. Z (ii) i własności przeciwbrazu zbiór

$$A \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{K}) \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(\mathbb{K} \setminus F) = f^{-1}(U)$$

jest otwarty w  $A$ .

(iii)  $\implies$  (i) Będziemy korzystać z definicji otoczeniowej. Ustalmy dowolne  $a \in A$  i dowolne otoczenie  $U$  punktu  $f(a)$ . Z (iii) wynika, że  $A \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(\mathbb{K} \setminus U)$  jest domknięty w  $A$ . Zatem  $f^{-1}(U)$  jest otwarty w  $A$ , czyli na mocy Własności 4.2.4 otwartości w przestrzeni indukowanej istnieje taki zbiór otwarty  $W$  w  $\mathbb{C}$ , że  $f^{-1}(U) = W \cap A$ . Mamy  $a \in f^{-1}(U) \subset W$ , zatem  $W$  jest otoczeniem  $a$  i z własności obrazu  $f(W \cap A) = f(f^{-1}(U)) \subset U$ . ■

### Twierdzenie 5.6.5 (Ciągły obraz zbioru zwartego)

Niech  $A \subset \mathbb{C}$  będzie zwarty i  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$  ciągła. Wtedy  $f(A)$  jest zwarty.

**Dowód:** Ustalmy dowolny ciąg  $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset f(A)$ . Musimy pokazać, że istnieje podciąg tego ciągu zbieżny do elementu z  $f(A)$ .

Z definicji obrazu  $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n \in A : f(x_n) = z_n$ . Zbiór  $A$  jest zwarty, zatem istnieje podciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{L}}$  zbieżny do pewnego punktu  $a \in A$ . Ponieważ  $f$  jest ciągła w  $a$ , więc z definicji Heinego ciągłości w punkcie  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{L}}$  jest zbieżny do  $f(a)$ , ale z definicji obrazu  $f(a) \in f(A)$ . Pokazaliśmy, że podciąg  $(z_n)_{n \in \mathbb{L}}$  jest zbieżny do pewnego elementu zbioru  $f(A)$ . ■

Uwaga: ciągły przeciwobraz zbioru zwartego nie musi być zwarty. Na przykład funkcja sinus jest ciągła, ale  $\sin^{-1}(\{0\}) = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  nie jest zwarty.

Odwzorowanie, dla którego przeciwobraz dowolnego zbioru zwartego jest zwarty, nazywamy **właściwym**. Dowolny niestały wielomian jest odwzorowaniem właściwym.

### Twierdzenie 5.6.6 (Weierstrassa o osiągnięciu kresów)

Niech  $A \subset \mathbb{C}$  będzie zwarty i niepusty oraz  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła. Wtedy istnieją takie  $\alpha, \beta \in A$ , że  $f(\alpha) = \sup f(A)$  oraz  $f(\beta) = \inf f(A)$ .

**Dowód:** Z Twierdzenia 5.6.5 o ciągłym obrazie zbioru zwartego wynika, że zbiór  $f(A)$  jest zwarty. Stąd na mocy Własności 4.4.2 (albo Twierdzenia 4.4.3 o zwartości w  $\mathbb{R}$ ) jest on ograniczony.

Wobec niepustości zbioru  $A$  obraz  $f(A)$  jest niepusty. Zatem z Aksjomatu Dedekinda (Twierdzenie 1.4.9) istnieją  $c := \inf f(A) \in \mathbb{R}$  i  $d := \sup f(A) \in \mathbb{R}$ .

Zajmiemy się teraz liczbą  $d$ , przypadek  $c$  jest symetryczny (ćwiczenie): wystarczy znaleźć takie  $\alpha \in A$ , że  $f(\alpha) = d$ .

Z definicji supremum dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}^*$  liczba  $d - \frac{1}{n}$  (mniejsza od  $d$ ) nie jest majorantą zbioru  $f(A)$ , zatem

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n \in A : d - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq d.$$

Z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach wynika, że  $f(x_n) \rightarrow d$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Ponieważ  $A$  jest zwarty, zatem istnieje podciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{L}}$  ciągu  $(x_n)_{n=1}^\infty$  zbieżny do pewnego elementu  $\alpha \in A$ . Z definicji Heinego ciągłości funkcji w punkcie ciąg  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{L}}$  jest zbieżny do  $f(\alpha)$ . Z Twierdzenia 3.5.4 o podciągu ciągu zbieżnego jest on też zbieżny do  $d$ . Z Twierdzenia 3.1.3 o jedności granicy  $d = f(\alpha)$ . ■

Zauważmy, że zwartość jest potrzebna: na przykład  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$  osiąga wprawdzie swój kres dolny, ale nie osiąga kresu górnego. Funkcja  $g : (0, 1) \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$  nie osiąga ani kresu górnego ani dolnego. Ciągłość też jest potrzebna, bo na

przykład funkcja  $f : [0, 2] \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ 1 - x, & x \in [1, 2) \\ 0, & x = 2 \end{cases}$  nie osiąga żadnego kresu.

**Twierdzenie 5.6.7 (O ciągłej iniekcji na zbiorze zwartym)** *Niech  $A \subset \mathbb{C}$  będzie zwarty i  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  będzie ciągłą iniekcją. Wtedy  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  jest ciągła.*

**Dowód:** Odwzorowanie  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  istnieje, bo  $f$  jest iniekcją.

Ustalmy dowolne  $b \in f(A)$  i ciąg  $(z_n)_{n=1}^\infty \subset f(A)$  zbieżny do  $b$ . Z definicji Heinego ciągłości wystarczy pokazać, że  $f^{-1}(z_n) \rightarrow f^{-1}(b)$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Niech  $a := f^{-1}(b)$  i  $\forall n \in \mathbb{N}^* : x_n := f^{-1}(z_n)$ . Wystarczy pokazać, że  $x_n \rightarrow a$ . Oczywiście  $a \in A$  i  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$  oraz  $f(a) = b$  i  $\forall n \in \mathbb{N}^* : f(x_n) = z_n$  z definicji funkcji odwrotnej.

Ustalmy dowolny podciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{L}}$  ciągu  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Ponieważ  $A$  jest zwarty, istnieje podciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{M}}$  tego ciągu zbieżny do pewnego  $g \in A$ . Z definicji Heinego ciągłości dla funkcji  $f$  wnioskujemy, że  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{M}}$  jest zbieżny do  $f(g)$ .

Ale z Twierdzenia 3.5.4 o podciągu ciągu zbieżnego ten ciąg jako podciąg ciągu  $(z_n)_{n=1}^\infty$  jest zbieżny do  $b = f(a)$ . Z Twierdzenia 3.1.3 o jedności granicy wynika, że  $f(a) = f(g)$ , zatem  $g = a$  z iniektywności funkcji.

Wystarczy skorzystać z Twierdzenia 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach. ■

**Twierdzenie 5.6.8 (Ciągły obraz zbioru spójnego)** *Niech  $A \subset \mathbb{C}$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  będzie ciągła. Jeśli  $A$  jest spójny, to  $f(A)$  jest spójny.*

**Dowód:** Kontrapozycja: Niech  $f(A)$  będzie niespójny, to znaczy istnieją  $U, V$  otwarte w  $f(A)$ , niepuste, rozłączne i takie, że  $f(A) = U \cup V$ .

Na mocy Własności 4.2.4 otwartości w przestrzeni indukowanej istnieją zatem  $U', V'$  otwarte w  $\mathbb{C}$  takie, że  $U = U' \cap f(A)$  i  $V = V' \cap f(A)$ . Z Kryterium ciągłości (Twierdzenie 5.6.4) zbiory  $f^{-1}(U'), f^{-1}(V')$  są otwarte w  $A$ .

Zauważmy, że  $f^{-1}(U') = f^{-1}(U)$  i  $f^{-1}(V') = f^{-1}(V)$ . Te zbiory są rozłączne i niepuste. Ponadto  $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(f(A)) \supset A$  z własności przeciwobrazu, ale też oba zbiory zawierają się w  $A$ , zatem  $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = A$ .

Pokazaliśmy, że  $A$  jest niespójny. ■

Ponownie na przykładzie funkcji sinus i tego samego przeciwobrazu widzimy, że ciągły przeciwobraz zbioru spójnego nie musi być spójny.

## 5.7 Twierdzenia Darboux

19

### Twierdzenie 5.7.1 (Własność Darboux rzeczywistych funkcji ciągłych)

Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła i  $\Delta \subset A$  jest przedziałem, to  $f(\Delta)$  jest przedziałem.

**Dowód:**  $\Delta$  jest przedziałem, zatem na mocy Twierdzenia 4.5.2 o przedziale jest zbiorem spójnym. Wobec Twierdzenia 5.6.8 o ciągłym obrazie zbioru spójnego zbiór  $f(\Delta)$  jest zbiorem spójnym. Oczywiście jest to zbiór niepusty, zatem ponownie stosujemy Twierdzenie o przedziale. ■

**Przykład 5.7.2 (Arcus sinus i arcus cosinus)** Funkcje *arcus sinus* i *arcus cosinus* są określone na przedziale  $[-1, 1]$  i ciągłe.

**Dowód:** Wobec powyższej własności Darboux rzeczywistych funkcji ciągłych i Przykładu 5.6.1 obrazy  $\sin([-\pi/2, \pi/2])$  oraz  $\cos([0, \pi])$  są przedziałami. Ponieważ obie funkcje są ograniczone od góry przez 1 i od dołu przez  $-1$  i przyjmują te skrajne wartości w tych ustalonych przedziałach (dokładniej na ich końcach), więc

$$\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1] = \cos([0, \pi]).$$

Stosujemy teraz Twierdzenie 5.6.7 o ciągłej iniekcji na zbiorze zwartym do  $\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}$  i  $\cos|_{[0, \pi]}$ . ■

**Definicja 5.7.3 (Własność wartości pośrednich Darboux)** Niech  $a, b \in \mathbb{R}$ . Mówimy, że  $c$  leży *pośrodku*  $a$  i  $b$ , gdy  $c \in [a, b]$ , jeśli  $a \leq b$ , natomiast  $c \in [b, a]$ , jeśli  $a > b$ .

Niech  $A \subset \mathbb{R}$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Mówimy, że  $f$  ma *własność (wartości pośrednich) Darboux*, jeśli

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad \forall c \text{ leżącego pomiędzy } f(\alpha) \text{ i } f(\beta) \quad \exists \gamma \in A : \quad c = f(\gamma).$$

---

<sup>19</sup>Jean Gaston Darboux (1842-1917) - matematyk francuski

**Twierdzenie 5.7.4 (Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich)**

Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła, to  $f$  ma własność wartości pośrednich Darboux.

**Dowód:** Pokażemy, że jeśli  $\alpha, \beta \in A$  będą takie, że  $\alpha < \beta$  oraz  $c$  leży pomiędzy  $f(\alpha)$  i  $f(\beta)$ , to  $\exists \gamma \in [\alpha, \beta] : c = f(\gamma)$ .

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $f(\alpha) \leq f(\beta)$  (drugi przypadek symetryczny). Z Charakteryzacji przedziałów (Własność 1.5.7) wynika, że  $[\alpha, \beta] \subset A$ . Na mocy Twierdzenia 5.7.1 o własności Darboux rzeczywistych funkcji ciągłych zbiór  $f([\alpha, \beta])$  jest przedziałem. Mamy  $f(\alpha), f(\beta) \in f([\alpha, \beta])$ , zatem również

$$[f(\alpha), f(\beta)] \subset f([\alpha, \beta])$$

znowu z Charakteryzacji przedziałów 1.5.7. W szczególności  $c \in f([\alpha, \beta])$  i teza wynika z definicji obrazu. ■

**Przykład 5.7.5 Funkcja**

$$f : [0, 2] \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \in [0, 1] \\ x + 3, & \text{gdy } x \in (1, 2] \end{cases}$$

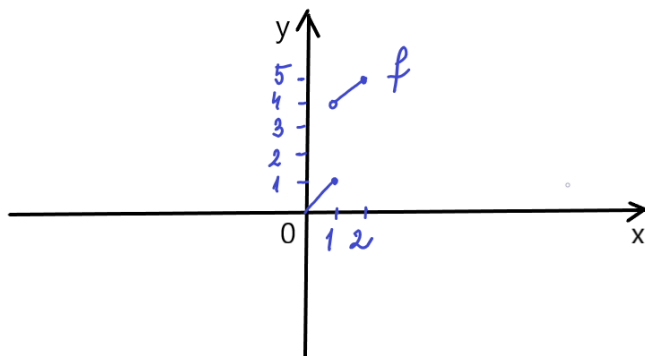
jest nieciągła w 1 i nie przyjmuje wartości 3, która leży pomiędzy  $f(1) = 1$  i  $f(2) = 5$ .

*Funkcja*

$$g : \mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0, & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

nie jest ciągła w 0, ale dla dowolnego przedziału  $\Delta \subset \mathbb{R}$  funkcja  $g|_{\Delta}$  ma własność wartości pośrednich Darboux.

**Dowód:**



Nieciągłość funkcji  $g$  w 0 wynika z Przykładu 5.1.2 i Twierdzenia 5.4.5 o zależności między ciągłością a granicą. Pozostałe tezy – ćwiczenie. ■

Następne twierdzenie jest właściwie wnioskiem z Twierdzenia 5.7.4 o przyjmowaniu wartości pośrednich, ale przedstawimy tu inny dowód.

**Twierdzenie 5.7.6 (Darboux)** *Jeśli  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła oraz  $f(a)f(b) < 0$ , to  $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$ .*

**Dowód:** Bez straty ogólności możemy założyć, że  $f(a) < 0$  i  $f(b) > 0$  (drugi przypadek jest symetryczny).

Rozważmy zbiór  $A := \{t \in [a, b] : f(t) \leq 0\}$ . Zbiór  $A$  jest niepusty, bo  $a \in A$ . Ponadto  $A$  jest ograniczony, bo  $A \subset [a, b]$ . Na mocy Aksjomatu Dedekinda (Twierdzenie 1.4.9) istnieje  $c := \sup A \in \mathbb{R}$ . Pokażemy, że to jest szukany punkt  $c$  z tezy. Mamy  $c \leq b$  (bo  $b$  jest majorantą zbioru  $A$ ).

Na mocy Ciągłego warunku koniecznego i wystarczającego kresu zbioru (Twierdzenie 3.4.6) istnieje ciąg  $(t_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$  zbieżny do  $c$ . Z definicji zbioru  $A$  wynika, że

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f(t_n) \leq 0,$$

a stąd z Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej i definicji Heinego ciągłości  $f(c) \leq 0$ . W szczególności  $c \neq b$ , bo  $f(b) > 0$ , czyli  $c < b$ .

Zauważmy, że  $\forall x \in (c, b] : f(x) > 0$  z definicji  $c$ . W szczególności

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : c + \frac{1}{n} \in (c, b] \text{ oraz } f\left(c + \frac{1}{n}\right) > 0.$$

Z ciągłości funkcji  $f$  i jeszcze raz Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności otrzymujemy  $f(c) \geq 0$ .

Pokazaliśmy zatem, że  $f(c) = 0$ , a stąd wynika także  $c \neq a$ . ■

To twierdzenie jest bardzo przydatne, jeśli nie umiemy wyliczyć pierwiastka funkcji rzeczywistej, a chcemy go przybliżyć.

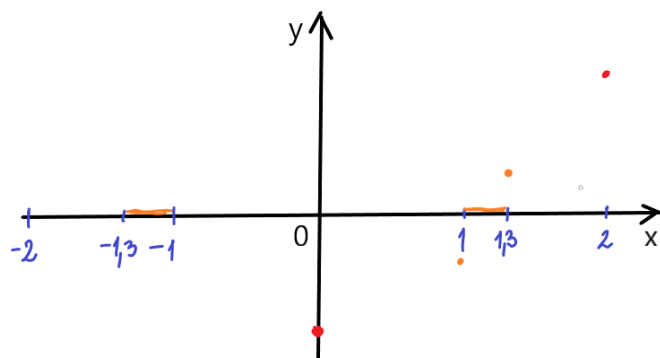
### Przykład 5.7.7 *Wielomian*

$$w : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^{100} + x^2 - 3 \in \mathbb{R}$$

*ma przynajmniej dwa pierwiastki, jeden z nich jest w przedziale  $(1; 1, 3)$ , drugi w przedziale  $(-1, 3; -1)$ .*

**Dowód:** Ponieważ  $w(0) = -3 < 0$  i  $w(2) = 2^{100} + 4 - 3 > 0$ , więc z Twierdzenia Darboux istnieje pierwiastek tego wielomianu w przedziale  $(0; 2)$ . Gdy chcemy bardziej przybliżyć, liczymy wartości w punktach tego przedziału. Ponieważ  $w(1) = -1$ , więc na pewno istnieje pierwiastek w  $(1; 2)$  (ale to nie znaczy, że na pewno nie ma

pierwiastka w  $(0; 1)$ , tam na razie nie wiadomo). Możemy jeszcze bardziej przybliżyć. Np.  $w(1, 3) = (1, 3)^{100} + 1,69 - 3 > 2 \cdot 1,69 - 3 = 0,38 > 0$ , zatem na pewno istnieje pierwiastek w przedziale  $(1; 1,3)$ . I tak można sprawdzać dalej. Ten akurat konkretny wielomian jest dwukwadratowy, zatem na pewno ma także pierwiastek w przedziale  $(-1,3; -1)$ .



■

## 5.8 Niewłaściwe granice funkcji

### Definicja 5.8.1 (Granice niewłaściwe w sensie Cauchy'ego)

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeśli  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ , to

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A : (0 < |x - a| < \delta \implies f(x) \geq M);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A : (0 < |x - a| < \delta \implies f(x) \leq M).$$

Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  i  $a$  jest prawostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A : (0 < x - a < \delta \implies f(x) \geq M);$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A : (0 < x - a < \delta \implies f(x) \leq M).$$

Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  i  $a$  jest lewostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A : (0 < a - x < \delta \implies f(x) \geq M);$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in A : (0 < a - x < \delta \implies f(x) \leq M).$$

### Definicja 5.8.2 (Granice niewłaściwe w sensie Heinego)

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeśli  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ , to

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\} : (x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow +\infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\} : (x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow -\infty).$$

Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  i  $a$  jest prawostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \cap (a, +\infty) : (x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow +\infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \cap (a, +\infty) : (x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow -\infty).$$

Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  i  $a$  jest lewostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \cap (-\infty, a) : (x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow +\infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \cap (-\infty, a) : (x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow -\infty).$$

Należy teraz wykazać, że definicje w sensie Cauchy'ego i Heinego są równoważne (ćwiczenie). Można wykorzystać definicję Heinego i wszystkie twierdzenia dotyczące granic i granic niewłaściwych ciągów, by tu otrzymać odpowiedniki dla granic i granic niewłaściwych funkcji.

### Definicja 5.8.3 (Granice w nieskończonościach w sensie Cauchy'ego)

Niech  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Jeśli  $A$  jest nieograniczony od góry, to

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{R} \forall x \in A : (x \geq m \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon).$$

Jeśli  $A$  jest nieograniczony od dołu, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{R} \forall x \in A : (x \leq m \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon).$$

Niech  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Jeśli  $A$  jest nieograniczony od góry, to

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{R} \forall x \in A : (x \geq m \implies f(x) \geq M);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{R} \forall x \in A : (x \geq m \implies f(x) \leq M).$$

Jeśli  $A$  jest nieograniczony od dołu, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{R} \forall x \in A : (x \leq m \implies f(x) \geq M);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{R} \forall x \in A : (x \leq m \implies f(x) \leq M).$$

### Definicja 5.8.4 (Granice w nieskończonościach w sensie Heinego)

Niech  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

Jeśli  $A$  jest nieograniczony od góry, to

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A : (x_n \rightarrow +\infty \implies f(x_n) \rightarrow \alpha).$$

Jeśli  $A$  jest nieograniczony od dołu, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A : (x_n \rightarrow -\infty \implies f(x_n) \rightarrow \alpha).$$

Niech  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Jeśli  $A$  jest nieograniczony od góry, to

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A : (x_n \rightarrow +\infty \implies f(x_n) \rightarrow +\infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A : (x_n \rightarrow +\infty \implies f(x_n) \rightarrow -\infty).$$

Jeśli  $A$  jest nieograniczony od dołu, to

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A : (x_n \rightarrow -\infty \implies f(x_n) \rightarrow +\infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A : (x_n \rightarrow -\infty \implies f(x_n) \rightarrow -\infty).$$

Znowu należy wykazać równoważność definicji (ćwiczenie).

**Wniosek 5.8.5** *Każdy wielomian  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nieparzystego stopnia ma pierwiastek.*

**Dowód:** Niech  $n \in \mathbb{N}$  będzie nieparzystą,  $a_n \neq 0$  oraz

$$w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Założmy, że  $a_n > 0$  (drugi przypadek jest symetryczny). Ponieważ

$$\forall x \neq 0 : w(x) = x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right),$$

więc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} w(x) = -\infty.$$

Zatem z definicji granicy w nieskończoności istnieją  $a, b \in \mathbb{R}$  takie, że  $w(a) \geq 1$  i  $w(b) \leq -1$ , w szczególności  $w(a)w(b) < 0$  i możemy skorzystać z Twierdzenia 5.7.6 Darboux. ■

### Przykład 5.8.6

1. Funkcje arcus tangens i arcus cotangens są określone na  $\mathbb{R}$  i ciągłe.
2. Funkcja logarytmiczna jest określona na  $(0, +\infty)$  i ciągła.

**Dowód:** Wykorzystamy Przykład 5.6.1: funkcje tangens, cotangens i funkcja wykładnicza są ciągłe.

Obrazy  $\operatorname{tg}((-\pi/2, \pi/2))$  i  $\operatorname{ctg}((0, \pi))$  są przedziałami na mocy Własności Darboux rzeczywistych funkcji ciągłych (Twierdzenie 5.7.1). Wystarczy policzyć jednostronne granice na krańcach przedziałów wyjściowych, by pokazać, że w obu przypadkach jest to całe  $\mathbb{R}$ . Podobnie obrazem funkcji wykładniczej  $f_a : \mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$  dla  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  jest przedział i licząc granice w nieskończonościach pokażemy, że jest to przedział  $(0, +\infty)$ .

Zatem arcus tangens i arcus cotangens są określone na  $\mathbb{R}$ , a funkcja logarytmiczna na  $(0, +\infty)$ .

Ustalmy dowolne  $x \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $t = \operatorname{arctg} x \in (-\pi/2, \pi/2)$ , a stąd

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \subset \Delta_n := \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n+1}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1}\right].$$

Stosujemy Twierdzenie 5.6.7 o ciągłej iniekcji na zbiorze zwartym do funkcji  $\operatorname{tg}|_{\Delta_n}$ , otrzymując ciągłość arcusa tangensa w punkcie  $x$ .

Analogicznie pokazujemy ciągłość funkcji arcus cotangens.

Dla logarytmu (przy ustalonej podstawie  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ) ustalmy dowolne  $x \in (0, +\infty)$ . Wtedy  $t = \log_a x \in \mathbb{R}$ ,

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : \quad t \in (-n, n) \subset \nabla_n := [-n, n].$$

Stosujemy Twierdzenie 5.6.7 o ciągłej iniekcji na zbiorze zwartym do funkcji  $f_a|_{\nabla_n}$ , otrzymując ciągłość logarytmu w punkcie  $x$ . ■

**Definicja 5.8.7 (Asymptoty)** Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , liczba  $a$  jest *prawostronnym* (odp. *lewostronnym*) *punktem skupienia* zbioru  $A$  oraz

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \in \{-\infty, +\infty\} \quad (\text{odp. } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}),$$

to prostą  $x = a$  nazywamy *prawostronną* (odp. *lewostronną*) *asymptotą pionową* funkcji  $f$ .

Jeśli  $b \in \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$  jest *nieograniczony od góry* (odp. *od dołu*),  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  oraz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad (\text{odp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b),$$

to prostą  $y = b$  nazywamy *asymptotą poziomą* funkcji  $f$ .

Jeśli  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$  jest *nieograniczony od góry* (odp. *od dołu*),  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  oraz

$$(5.2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad (\text{odp. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0),$$

to prostą  $y = ax + b$  nazywamy *asymptotą ukośną* funkcji  $f$ .

Zwróćmy uwagę, że dla  $a \neq 0$  wzór z (5.2) zachodzi tylko wtedy, gdy  $f$  ma w odpowiedniej nieskończoności granicę niewłaściwą.

Logarytm ma prawostronną asymptotę pionową  $x = 0$ . Funkcja może mieć nieskończenie wiele asymptot pionowych, na przykład funkcje tangens i cotangens mają ich nieskończenie wiele.

Funkcja może mieć co najwyżej dwie asymptoty poziome (jedną w plus, a drugą w minus nieskończoności). Funkcje signum, arcus tangens i arcus cotangens mają właśnie po dwie asymptoty poziome. Funkcja  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$  ma tę samą asymptotę poziomą  $y = 0$  w obu nieskończonościach, funkcja wykładnicza ma asymptotę  $y = 0$  w jednej nieskończoności.

W szczególności każda asymptota pozioma jest ukośna. Funkcja liniowa jest sama swoją asymptotą ukośną. Funkcja może mieć co najwyżej dwie asymptoty ukośne, jedną w plus, drugą w minus nieskończoności. Funkcja moduł ma w plus nieskończoności asymptotę  $y = x$ , a w minus nieskończoności  $y = -x$ . Ponieważ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = 0,$$

zatem funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} \in \mathbb{R}$  ma dwie asymptoty ukośne:  $y = x$  w plus nieskończoności i  $y = -x$  w minus nieskończoności.

Zauważmy, że z (5.2) wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = 0,$$

a ponieważ  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$ , więc stąd

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

I wobec tego ponownie z (5.2)

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

Za pomocą tych wzorów można wyliczyć równanie asymptoty ukośnej  $y = ax + b$  w plus nieskończoności. Analogicznie licząc granice w minus nieskończoności wyznaczamy tę drugą asymptotę ukośną, o ile istnieje.

I na koniec podrozdziału dwa przydatne uproszczenia w stosowaniu definicji Heinego.

**Lemat 5.8.8** *Załóżmy, że zachodzi jeden z warunków:*

- $A \subset \mathbb{C}$  i  $b$  jest jego punktem skupienia;
- $A \subset \mathbb{R}$  jest nieograniczony od góry i  $b = +\infty$ ;
- $A \subset \mathbb{R}$  jest nieograniczony od dołu i  $b = -\infty$ .

Niech  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

- ( $\iota$ ) istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \in \mathbb{C}$ ;
- ( $\iota$ ) jeśli  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{b\}$  i  $x_n \rightarrow b$ , to ciąg  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny.

**Dowód:** Implikacja ( $\iota$ )  $\implies$  ( $\iota$ ) jest natychmiastową konsekwencją definicji Heinego (odpowiednio Definicji 5.1.1 lub 5.8.4).

Chcemy wykazać implikację przeciwną. Założmy zatem, że zachodzi warunek ( $\iota$ ). Trzeba pokazać, że każdy z tych ciągów  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  z tego warunku ma tę samą granicę.

Założmy dla dowodu nie wprost, że istnieją dwa takie ciągi  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{b\}$  i  $(y_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{b\}$  oba dążące do  $b$ , ale takie, że  $f(x_n) \rightarrow s$ ,  $f(y_n) \rightarrow t$  i  $t \neq s$ . Tworzymy ciąg  $(z_n)_{n=1}^\infty$  przepisem

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad z_{2n+1} = x_n, \quad z_{2n} = y_n.$$

Z definicji i wyboru ciągów  $(x_n), (y_n)$  wynika, że  $(z_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{b\}$ . Jeśli  $b$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ , to  $z_n \rightarrow b$  na mocy Wniosku 3.5.6, jeśli  $b$  jest którąś nieskończonością, to wykorzystujemy Własność 3.11.5 i pokazujemy także, że  $z_n \rightarrow b$  (ćwiczenie). Natomiast  $(f(z_n))_{n=1}^\infty$  jest rozbieżny, bo ma jeden podciąg dążący do  $s$ , a drugi do  $t$  (por. Twierdzenie 3.5.4 o granicy podciągu ciągu zbieżnego). Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem ( $\iota$ ). ■

**Lemat 5.8.9** Niech  $-\infty < a < b \leq +\infty$  i  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ . Wtedy następujące warunki są równoważne:

- ( $\iota$ ) istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \in \mathbb{C}$ ;
- ( $\iota$ ) jeśli  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset [a, b)$  jest niemalejący i  $x_n \rightarrow b$ , to ciąg  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny.

**Dowód:** Implikacja ( $\iota$ )  $\implies$  ( $\iota$ ) jest znowu natychmiastową konsekwencją definicji Heinego.

Chcemy teraz wykazać implikację przeciwną. Założmy zatem, że zachodzi warunek ( $\iota$ ). Wobec Lematu 5.8.8 wystarczy pokazać, że jeśli  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset [a, b)$  i  $x_n \rightarrow b$ , to ciąg  $(f(x_n))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny.

Ustalmy zatem dowolny taki ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset [a, b)$ , że  $x_n \rightarrow b$ . Na mocy Zasady Minimum (Twierdzenie 1.1.1) dla każdego niepustego podzbioru  $L \subset \mathbb{N}^*$  istnieje  $\min\{x_n : n \in L\}$ .

Definiujemy funkcję  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\varphi(1) &:= \min\{n \in \mathbb{N}^* : x_n = \min\{x_k : k \in \mathbb{N}^*\}\}; \\ \varphi(2) &:= \min\{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{\varphi(1)\} : x_n = \min\{x_k : k \in \mathbb{N}^* \setminus \{\varphi(1)\}\}\}; \\ &\vdots \\ \varphi(m) &:= \min\{n \in \mathbb{N}^* \setminus \{\varphi(1), \dots, \varphi(m-1)\} : x_n = \min_{k \in \mathbb{N}^* \setminus \{\varphi(1), \dots, \varphi(m-1)\}} x_k\}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że  $\varphi$  jest bijekcją. Niech  $\forall n \in \mathbb{N}^* : z_n := x_{\varphi(n)}$ . Wtedy także  $\forall n \in \mathbb{N}^* : x_n = z_{\varphi^{-1}(n)}$ .

Na mocy Twierdzenia 3.5.1 o mieszaniu (lub jego odpowiednika dla przypadku  $b = +\infty$ , który zostawiam jako ćwiczenie) mamy  $z_n \rightarrow b$ . Z definicji  $\varphi$  wynika, że ciąg  $(z_n)_{n=1}^\infty$  jest niemalejący, zatem z punktu  $(\iota)$  wynika, że  $(f(z_n))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny. Ale stąd i znowu z Twierdzenia 3.5.1 o mieszaniu wynika, że  $(f(x_n))_{n=1}^\infty = (f(z_{\varphi^{-1}(n)}))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny. ■

Oczywiście można symetrycznie wykazać lemat dla przedziału  $(a, b]$  i granicy w  $a$ .

## 6 Rachunek różniczkowy

### 6.1 Różniczkowalność

**Definicja 6.1.1 (Iloraz różnicowy)** Niech  $A \subset \mathbb{K}$  będzie otwarty,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \in A$ . *Ilorazem różnicowym* funkcji  $f$  w punkcie  $a$  nazywamy funkcję

$$\mathcal{I}_{f,a} : A \setminus \{a\} \ni x \mapsto \mathcal{I}_{f,a}(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}.$$

Zauważmy, że ponieważ  $A$  jest otwarty, więc  $a$  jest punktem skupienia zbioru  $A \setminus \{a\}$  (przy czym w przypadku  $A \subset \mathbb{R}$  zarówno lewo-, jak i prawostronnym), zatem jest sens mówić o granicy ilorazu różnicowego w punkcie  $a$ .

**Definicja 6.1.2 (Pochodna i różniczkowalność)** Niech  $A$  będzie zbiorem otwartym w  $\mathbb{K}$ ,  $a \in A$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Jeśli istnieje granica przy  $x$  dążącym do  $a$  ilorazu różnicowego funkcji  $f$  w punkcie  $a$ , to nazywamy ją *pochodną* funkcji  $f$  w punkcie  $a$  i oznaczamy symbolem  $f'(a)$ ; mówimy wtedy także, że  $f$  jest *różniczkowalna* w  $a$ .

Uwaga: tu chodzi o granicę właściwą! Nie mówimy o nieskończonej pochodnej.

**Przykład 6.1.3** Funkcja stała jest różniczkowalna w dowolnym punkcie. Moduł nie jest różniczkowalny w 0.

**Dowód:** Niech  $a \in \mathbb{C}$ . Ilorazem różnicowym funkcji stałej w  $a$  jest funkcja stale równa 0. Zatem funkcja stała jest różniczkowalna w dowolnym punkcie i jej pochodna jest równa 0.

Ilorazem różnicowym funkcji  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$  w 0 jest  $\operatorname{sgn}|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ , bo

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad \mathcal{I}_{f,0}(x) = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x).$$

Zatem  $f$  nie jest różniczkowalna w 0 (por. Przykład 5.3.4).

Stąd także można wywnioskować, że  $\mathbb{C} \ni z \mapsto |z| \in \mathbb{C}$  nie jest różniczkowalny w 0 – ćwiczenie. ■

**Własność 6.1.4 (Różniczkowalność a ciągłość)** Niech  $A \subset \mathbb{K}$  będzie otwarty,  $a \in A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Jeśli  $f$  jest różniczkowalna w  $a$ , to jest w  $a$  ciągła.

**Dowód:** Zbiór  $A$  jest otwarty, zatem  $a$  jest punktem skupienia  $A$ . Wobec Związku między ciągłością a granicą (Twierdzenie 5.4.5) wystarczy pokazać, że  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Wykorzystamy Twierdzenie 5.2.5 o działaniach na granicach funkcji

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) + f(a) \right) = f'(a) \cdot 0 + f(a).$$

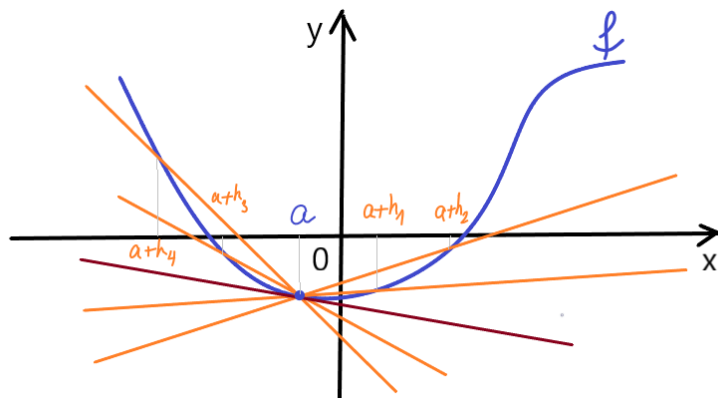
■

Niech  $A$  będzie otwarty w  $\mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  i  $a \in A$ . Mamy

$$\lim_{x \rightarrow a} \mathcal{I}_{f,a}(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Zauważmy, że jeśli  $|h|$  jest dostatecznie małe, to  $a+h \in A$  oraz  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  jest współczynnikiem kierunkowym **siecznej** wykresu funkcji  $f$ , czyli prostej przechodzącej przez punkty  $(a, f(a))$  i  $(a+h, f(a+h))$ . Zatem równanie tej siecznej to

$$y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} (x - a).$$



Jeśli teraz  $h \rightarrow 0$ , to punkt  $(a+h, f(a+h))$  zbliża się do punktu  $(a, f(a))$ . Zatem jeśli istnieje  $f'(a)$ , to otrzymujemy w granicy tych kolejnych siecznych prostą

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Jest to prosta **styczna** do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $a$ . Zauważmy, że moduł w 0 nie ma pochodnej (por. Przykład 6.1.3). Nie ma on też w tym punkcie stycznej, bo tam wykres nie jest gładki, ale ma **ostrze**.

Tak więc interpretacja geometryczna pochodnej, to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu.

Interpretacja fizyczna natomiast to prędkość chwilowa. Średnią prędkość w km/h lub m/s liczy się dzieląc ilość przebytych kilometrów (metrów) przez czas potrzebny do przebycia tego dystansu. Ale jak wiemy prędkość może się zmieniać, nie być stała. I jej wartość w danej chwili liczy się jako właśnie granicę ilorazu różnicowego, zatem pochodną przebytej drogi po czasie. Z kolei jeśli prędkość potraktujemy jako funkcję czasu, to możemy policzyć jej pochodną po czasie otrzymując przyspieszenie chwilowe.

**Własność 6.1.5 (Lokalność różniczkowalności)** *Różniczkowalność w punkcie jest własnością lokalną, to znaczy jeśli  $A \subset \mathbb{K}$  otwarty,  $a \in A$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  oraz istnieje takie otoczenie  $V$  punktu  $a$  w  $A$ , że  $f|_V \equiv g|_V$ , to  $f$  jest różniczkowalna w  $a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $g$  jest różniczkowalna w  $a$ . Ponadto jeśli te funkcje są różniczkowalne, to  $f'(a) = g'(a)$ .*

**Dowód:** Wniosek z Własności 5.1.3 lokalności granicy. ■

**Twierdzenie 6.1.6 (O działaniach na pochodnych)** *Niech  $A \subset \mathbb{K}$  będzie otwarty,  $a \in A$  i funkcje  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  będą różniczkowalne w  $a$ . Wtedy:*

- (i)  $f + g$  jest różniczkowalna w  $a$  oraz  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ;
- (ii)  $c \in \mathbb{C} \implies cf$  jest różniczkowalna w  $a$  oraz  $(cf)'(a) = cf'(a)$ ;
- (iii)  $fg$  jest różniczkowalna w  $a$  oraz  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ;
- (iv)  $g(a) \neq 0 \implies \frac{f}{g}$  jest różniczkowalna w  $a$  oraz  $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$ .

**Dowód:** Korzystamy z Twierdzenia 5.2.5 o działaniach na granicach funkcji.

(i)

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = f'(a) + g'(a). \end{aligned}$$

(ii)

$$(cf)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left( c \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = cf'(a).$$

(iii)

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x)}{x - a} + \frac{f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a), \end{aligned}$$

przy czym tu dodatkowo korzystamy z ciągłości funkcji  $g$  w  $a$  (i Twierdzenia 5.4.5 o związku ciągłości z granicą), która to ciągłość wynika z różniczkowalności (Własność 6.1.4).

(iv) Ponieważ  $g(a) \neq 0$ , zatem w pewnym otoczeniu punktu  $a$  funkcja  $g$  nie przyjmuje

wartości zerowych z ciągłości (Własność 6.1.4) i na mocy Własności 5.2.3 mówiącej o niezerowej granicy.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1/g)(x) - (1/g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{g(a)g(x)(x - a)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left( -\frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = -\frac{g'(a)}{(g(a))^2}, \end{aligned}$$

gdzie ponownie wykorzystaliśmy ciągłość w punkcie  $a$ . A teraz wobec (iii)

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \\ &= \frac{f'(a)}{g(a)} + \frac{f(a) \cdot (-g'(a))}{(g(a))^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}. \end{aligned}$$

■

**Twierdzenie 6.1.7 (O pochodnej funkcji złożonej)** *Niech  $A, B \subset \mathbb{K}$  będą otwarte,  $a \in A$ , funkcja  $f : A \rightarrow B$  będzie różniczkowalna w  $a$ , funkcja  $g : B \rightarrow \mathbb{C}$  będzie różniczkowalna w  $f(a)$ . Wtedy  $g \circ f$  jest różniczkowalna w  $a$  oraz  $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$ .*

**Dowód:** Skorzystamy z definicji Heinego granicy funkcji i ciągłości.

Ustalmy dowolny  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\}$  zbieżny do  $a$ . Musimy pokazać, że  $(\mathcal{I}_{g \circ f, a}(x_n))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny do  $f'(a)g'(f(a))$ .

Ustalmy dowolny jego podciąg  $(\mathcal{I}_{g \circ f, a}(x_n))_{n \in \mathbb{L}}$ . Definiujemy  $\mathbb{L}_1 := \{n \in \mathbb{L} : f(x_n) = f(a)\}$  i  $\mathbb{L}_2 := \{n \in \mathbb{L} : f(x_n) \neq f(a)\}$ .

Jeśli  $\mathbb{L}_1$  jest nieskończony, to  $(\mathcal{I}_{f, a}(x_n))_{n \in \mathbb{L}_1}$  jest stale równy zero, stąd jest również zbieżny do 0, w szczególności w tym wypadku musi zachodzić  $f'(a) = 0$ , również  $(\mathcal{I}_{g \circ f, a}(x_n))_{n \in \mathbb{L}_1}$  jest stale równy zero, stąd jego granica też jest równa zero, więc jest równa  $0 \cdot g'(f(a)) = f'(a)g'(f(a))$ .

Jeśli  $\mathbb{L}_1$  jest skończony, to  $\mathbb{L}_2$  jest nieskończony i możemy zapisać

$$\forall n \in \mathbb{L}_2 : \quad \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{x_n - a} = \frac{g(f(x_n)) - g(f(a))}{f(x_n) - f(a)} \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Z ciągłości  $f$  w punkcie  $a$  (Własność 6.1.4) pierwszy czynnik po prawej stronie dąży  $g'(f(a))$ , natomiast granicą drugiego jest  $f'(a)$ .

Z Twierdzenia 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach ciąg  $(\mathcal{I}_{g \circ f, a}(x_n))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny do  $f'(a)g'(f(a))$ . ■

**Twierdzenie 6.1.8 (O różniczkowaniu funkcji odwracalnej)** *Niech  $A, B \subset \mathbb{K}$  będą otwarte,  $a \in A$  i funkcja  $f : A \rightarrow B$  będzie bijekcją różniczkowalną w  $a$ .*

Jeśli  $f'(a) \neq 0$  i  $f^{-1}$  jest ciągła w  $f(a)$ , to  $f^{-1}$  jest różniczkowalna w  $f(a)$  oraz  $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$ .

**Dowód:** Niech  $b = f(a)$ . Będziemy korzystać z definicji Heinego granicy.

Ustalmy dowolny ciąg  $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset B \setminus \{b\}$  zbieżny do  $b$ . Musimy pokazać, że  $\mathcal{I}_{f^{-1},b}(y_n) \longrightarrow \frac{1}{f'(a)}$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Wobec ciągłości  $f^{-1}$  w  $b$  mamy  $x_n := f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(b) = a$ . Zauważmy, że z iniektywności funkcji  $f^{-1}$  wynika, że  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A \setminus \{a\}$ .

Na mocy Własności 5.2.3 niezerowej granicy istnieje takie  $m > 0$ , że  $|\mathcal{I}_{f,a}(x)| > m$  dla  $x$  w pewnym sąsiedztwie punktu  $a$ . Skoro  $x_n \longrightarrow a$ , to prawie wszystkie wyrazy ciągu  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  są w tym sąsiedztwie, a to oznacza, że

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right| > m > 0.$$

Mamy stąd dla  $n \geq N$

$$\mathcal{I}_{f^{-1},b}(y_n) = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\mathcal{I}_{f,a}(x_n)} \longrightarrow \frac{1}{f'(a)}.$$

■

Niech  $A$  będzie otwarty w  $\mathbb{K}$  i  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$  będzie różniczkowalna w przynajmniej jednym punkcie zbioru  $A$ . Wtedy

$$f' : B \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{C},$$

gdzie  $B := \{x \in A : f \text{ jest różniczkowalna w } x\}$ , nazywamy funkcją **po pochodną** funkcji  $f$ .

### Przykład 6.1.9 (Pochodne funkcji elementarnych)

1. Jeśli  $c \in \mathbb{C}$  i  $f : \mathbb{C} \ni x \longmapsto c \in \mathbb{C}$ , to  $f' \equiv 0$ .
2. Jeśli  $n \in \mathbb{N}^*$  i  $f : \mathbb{C} \ni x \longmapsto x^n \in \mathbb{C}$ , to  $f' : \mathbb{C} \ni t \longmapsto nt^{n-1} \in \mathbb{C}$ .
3. Jeśli  $n \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, 0)$  i  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni x \longmapsto x^n \in \mathbb{C}$ , to

$$f' : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni t \longmapsto nt^{n-1} \in \mathbb{C}.$$

4. Jeśli  $n \in \mathbb{N}^*$  jest parzysta i  $f : [0, +\infty) \ni x \longmapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ , to

$$f' : (0, +\infty) \ni t \longmapsto \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} \in \mathbb{R}.$$

5. Jeśli  $n \in \mathbb{N}^*$  jest nieparzystą i  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ , to

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni t \mapsto \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1} \in \mathbb{R}.$$

6.  $(\sin)' = \cos$ ;  $(\cos)' = -\sin$ ;  $(\operatorname{tg})' = 1 + \operatorname{tg}^2 = \frac{1}{\cos^2}$ ;  $(\operatorname{ctg})' = -1 - \operatorname{ctg}^2 = -\frac{1}{\sin^2}$ .

7.

$$(\arcsin)' : (-1, 1) \ni t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathbb{R};$$

$$(\arccos)' : (-1, 1) \ni t \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{arctg})' : \mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{arcctg})' : \mathbb{R} \ni t \mapsto -\frac{1}{1+t^2} \in \mathbb{R}.$$

8. Jeśli  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ , to  $f' \equiv f$ .

9.  $(\ln)' : (0, +\infty) \ni t \mapsto \frac{1}{t} \in \mathbb{R}$ .

10. Jeśli  $a > 0$  i  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto a^x \in \mathbb{R}$ , to  $f' : \mathbb{R} \ni t \mapsto a^t \ln a \in \mathbb{R}$ .

11. Jeśli  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , to  $(\log_a)' : (0, +\infty) \ni t \mapsto \frac{1}{t \ln a} \in \mathbb{R}$ .

12. Jeśli  $\alpha \in \mathbb{R}$  i  $f : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ , to  $f' : (0, +\infty) \ni t \mapsto \alpha t^{\alpha-1} \in \mathbb{R}$ .

**Dowód:** Będziemy stosowali często działania na pochodnych (Twierdzenie 6.1.6), pochodną złożenia (Twierdzenie 6.1.7) i pochodną funkcji odwrotnej (Twierdzenie 6.1.8).

1.

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{c - c}{x - t} = \lim_{x \rightarrow t} 0 = 0.$$

2. Wobec (1.5)

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{x^n - t^n}{x - t} = \lim_{x \rightarrow t} \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k t^{n-1-k} \right) = nt^{n-1}.$$

3. Niech  $t \neq 0$ . I połóżmy  $m = -n$ , wtedy  $m \in \mathbb{N}^*$ . Z pochodnej ilorazu złożenia dla  $t \neq 0$  mamy

$$(t^n)' = \left( \frac{1}{t^m} \right)' = \frac{0 \cdot t^m - 1 \cdot m t^{m-1}}{t^{2m}} = -m t^{-m-1} = n t^{n-1}.$$

4., 5. Z pochodnej funkcji odwrotnej. Niech  $g(x) = x^n$  (przy czym  $x > 0$  dla  $n$  parzystych i  $x \neq 0$  dla  $n$  nieparzystych), wtedy  $f \equiv g^{-1}$ . Niech  $t = g(s) = s^n$ , wtedy  $s = \sqrt[n]{t}$  i mamy z 2.

$$f'(t) = (g^{-1})'(g(s)) = \frac{1}{g'(s)} = \frac{1}{ns^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{t}^{n-1}} = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}.$$

6. Wobec Przykładu 5.1.7 i ciągłości funkcji trygonometrycznych (Przykład 5.6.1)

$$(\sin)'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{\sin x - \sin t}{x - t} = \lim_{x \rightarrow t} \frac{2 \sin \frac{x-t}{2} \cos \frac{x+t}{2}}{x - t} = \lim_{x \rightarrow t} \frac{\sin \frac{x-t}{2}}{\frac{x-t}{2}} \cos \frac{x+t}{2} = \cos t.$$

A ponieważ  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , więc z pochodnej złożenia

$$(\cos t)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot (-1) = -\sin t.$$

Pochodne tangensa i cotangensa liczymy stosując działania na pochodnych (ćwiczenie).

7. Stosujemy pochodną funkcji odwrotnej. Niech  $t \in (-1, 1)$  i  $s = \arcsin t$ , zatem  $t = \sin s$ .

$$(\arcsin(t))' = (\sin^{-1})'(\sin s) = \frac{1}{\sin'(s)} = \frac{1}{\cos s} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Analogicznie liczymy pochodne pozostałych funkcji cyklometrycznych (ćwiczenie).

8. Jeśli  $u = e^x - 1$ , to  $e^x = 1 + u$  i  $x = \ln(1 + u)$ . Zauważmy, że  $x \rightarrow 0 \iff u \rightarrow 0$ , zatem

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x - 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1 + u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + u)^{1/u}} = \frac{1}{\ln e} = 1,$$

z Przykładu 5.1.2 i ciągłości funkcji  $\ln$  (Przykład 5.8.6). W szczególności  $f'(0) = 1 = e^0 = f(0)$ . Niech  $t \in \mathbb{R}$ . Otrzymujemy

$$f'(t) = \lim_{x \rightarrow t} \frac{e^x - e^t}{x - t} = \lim_{x \rightarrow t} e^t \frac{e^{x-t} - 1}{x - t} = \lim_{s \rightarrow 0} e^t \frac{e^s - 1}{s - 0} = e^t \cdot 1 = e^t = f(t).$$

9. Ustalmy dowolne  $t \in (0, \infty)$  i  $s = \ln t$ . Niech  $f : \mathbb{R} \ni u \mapsto e^u \in (0, +\infty)$ . Wtedy z pochodnej funkcji odwrotnej

$$(\ln)'(t) = (f^{-1})'(f(s)) = \frac{1}{f'(s)} = \frac{1}{e^s} = \frac{1}{t}.$$

10. Mamy  $a^t = e^{\ln a^t} = e^{t \ln a}$ . Zatem z pochodnej funkcji złożonej

$$(a^t)' = (e^{t \ln a})' = e^{t \ln a} \cdot \ln a = a^t \ln a.$$

11. ćwiczenie.

12. Dla  $t > 0$  mamy  $t^\alpha = e^{\ln t^\alpha} = e^{\alpha \ln t}$ , zatem

$$(t^\alpha)' = (e^{\alpha \ln t})' = e^{\alpha \ln t} \cdot \alpha \frac{1}{t} = t^\alpha \cdot \alpha t^{-1} = \alpha t^{\alpha-1}.$$

■

Uwaga: Jeśli chcemy policzyć pochodną funkcji postaci  $(f(x))^{g(x)}$ , to zakładamy, że  $f(x) > 0$  i zapisujemy

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

## 6.2 Twierdzenia o wartości średniej

**Definicja 6.2.1 (Ekstremum lokalne)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$  będzie otwarty,  $a \in A$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

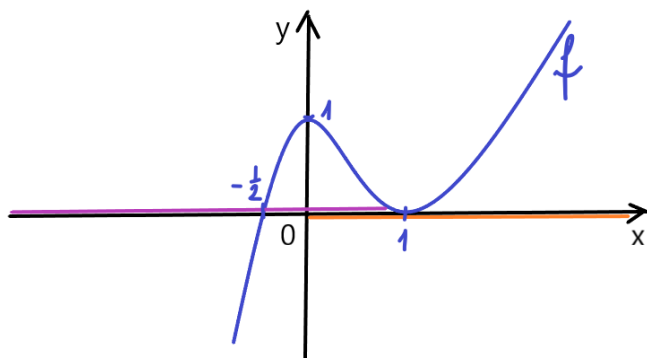
Mówimy, że  $f$  ma w  $a$  **maksimum** (odp. **minimum**) lokalne, gdy  $\exists V$  – otoczenie  $a$  w  $A$   $\forall x \in V : f(x) \leq f(a)$  (odp.  $f(x) \geq f(a)$ ).

**Ekstremum** to albo maksimum, albo minimum.

Każde ekstremum globalne jest ekstremum lokalnym, ale nie na odwrót.

**Przykład 6.2.2** Niech  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1 \in \mathbb{R}$ . Wtedy funkcja  $f$  nie ma ekstremum globalnego, ale ma minimum lokalne w punkcie 1 i maksimum lokalne w punkcie 0.

**Dowód:** Zauważmy, że  $f(x) = (2x+1)(x-1)^2$ . Mamy  $f(0) = 1, f(2) = 5$ , dlatego  $f$  nie ma w 0 maksimum globalnego. Mamy  $f(1) = 0, f(-1) = -4$ , dlatego  $f$  nie ma w 1 minimum globalnego. Funkcja  $f$  jest rosnąca w  $(-\infty, 0)$ , malejąca w  $(0, 1)$  i rosnąca w  $(1, +\infty)$  (ćwiczenie).  $f|_{(-\infty, 1)}$  ma maksimum globalne w 0 i  $f|_{(0, +\infty)}$  ma minimum globalne w 1 (ćwiczenie).



■

Powiemy teraz o warunku koniecznym ekstremum różniczkowalnej funkcji rzeczywistej.

**Twierdzenie 6.2.3 (Fermata o zerowaniu się pochodnej)** <sup>20</sup>

Niech  $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < a < \beta$  oraz  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna. Jeśli  $f$  ma w  $a$  ekstremum lokalne, to  $f'(a) = 0$ .

**Dowód:** Załóżmy, że  $f$  ma w  $a$  maksimum lokalne (przypadek minimum lokalnego jest symetryczny). Niech  $V$  będzie otoczeniem punktu  $a$  w  $(\alpha, \beta)$  z definicji maksimum lokalnego. Wobec lokalności granicy (Własność 5.1.3) wystarczy rozważyć  $\mathcal{I}_{f|V,a}$ . Mamy  $f(x) \leq f(a)$  dla  $x \in V$ , czyli

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{f|V,a}(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 & \text{dla } x \in V \cap (a, +\infty), \\ \mathcal{I}_{f|V,a}(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 & \text{dla } x \in V \cap (-\infty, a).\end{aligned}$$

Funkcja  $f$  jest różniczkowalna, zatem istnieje pochodna  $f'(a)$  i z Twierdzenia 5.3.5 o związku między granicą i granicami jednostronnymi mamy

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \mathcal{I}_{f|V,a}(x) = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \mathcal{I}_{f|V,a}(x).$$

Z definicji Heinego granic jednostronnych i Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej dla ciągów

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow a^-} \mathcal{I}_{f|V,a}(x) = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \mathcal{I}_{f|V,a}(x) \leq 0.$$

■

Dla  $f$  z Przykładu 6.2.2 mamy  $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$ .

Warunek konieczny nie jest wystarczający. Na przykład jeśli  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ , to  $f'(0) = 0$ , ale  $f$  jest rosnąca w całym  $\mathbb{R}$ , zatem nie ma żadnego ekstremum lokalnego.

**Twierdzenie 6.2.4 (Rolle'a)** <sup>21</sup> Niech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$  i  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła. Jeśli  $f$  jest różniczkowalna w  $(\alpha, \beta)$  i  $f(\alpha) = f(\beta)$ , to  $\exists c \in (\alpha, \beta) : f'(c) = 0$ .

<sup>20</sup>Pierre de Fermat (1601-1665) – matematyk francuski

<sup>21</sup>Michel Rolle (1652-1719) - matematyk francuski

**Dowód:** Jeśli  $f$  jest funkcją stałą, to w dowolnym punkcie przedziału  $(\alpha, \beta)$  pochodna się zeruje (Przykład 6.1.9).

Założmy teraz, że  $f$  nie jest funkcją stałą. Zatem  $\exists z \in (\alpha, \beta) : f(z) \neq f(\alpha)$ . Założmy dla ustalenia uwagi, że  $f(z) > f(\alpha)$  (drugi przypadek jest symetryczny).

Przedział  $[\alpha, \beta]$  jest domknięty i ograniczony, zatem zwarty (Twierdzenie 4.4.3). Na mocy Twierdzenia 5.6.6 Weierstrassa o osiągnięciu kresów  $\exists c \in [\alpha, \beta] : f(c) = \sup f([\alpha, \beta])$ .

Mamy  $f(c) \geq f(z) > f(\alpha) = f(\beta)$ , zatem  $c \in (\alpha, \beta)$ . W punkcie  $c$  funkcja  $f$  ma maksimum globalne, zatem także lokalne, stąd  $f'(c) = 0$  na mocy Twierdzenia 6.2.3 Fermata. ■

Założenie o tym, że wartości funkcji są rzeczywiste, jest ważne.

**Przykład 6.2.5** Niech  $f : [0, 2\pi] \ni t \mapsto \cos t + i \sin t \in \mathbb{C}$ . Jest to funkcja ciągła. Mamy  $f(0) = f(2\pi)$  i  $f$  jest różniczkowalna w  $(0, 2\pi)$ , ale pochodna nigdzie się nie zeruje.

**Dowód:** Jak w Przykładzie 6.1.9 pokazujemy, że

$$f' : (0, 2\pi) \ni t \mapsto -\sin t + i \cos t \in \mathbb{C}.$$

Zatem pochodna  $f'$  nigdzie się nie zeruje. ■

**Twierdzenie 6.2.6 (Lagrange’a o wartości średniej)** <sup>22</sup> Niech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$  oraz niech  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągłą. Jeśli  $f$  jest różniczkowalna w  $(\alpha, \beta)$ , to

$$\exists c \in (\alpha, \beta) : f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

**Dowód:** Definiujemy funkcję

$$h : [\alpha, \beta] \ni x \mapsto h(x) := f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) \in \mathbb{R}.$$

Jest ona ciągła na mocy Twierdzenia 5.5.1 o działaniach na funkcjach ciągłych. Jest ona też różniczkowalna w  $(\alpha, \beta)$  na mocy Twierdzenia 6.1.6 o działaniach na pochodnych.

Mamy  $h(\alpha) = f(\alpha)$  oraz  $h(\beta) = f(\beta) - (f(\beta) - f(\alpha)) = f(\alpha)$ . Zatem na mocy Twierdzenia 6.2.4 Rolle’a  $\exists c \in (\alpha, \beta) : h'(c) = 0$ . Mamy więc

$$f'(c) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0.$$

■

---

<sup>22</sup>Joseph Louis Lagrange (1736-1813) – matematyk włosko-francuski

**Wniosek 6.2.7 (O zerowej pochodnej)** *Niech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$  oraz niech  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła. Jeśli  $f$  jest różniczkowalna w  $(\alpha, \beta)$  i jej pochodna jest stale równa zero, to  $f$  jest funkcją stałą.*

**Dowód:** Wobec Twierdzenia 6.2.6 Lagrange’a  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Ustalmy dowolny  $x \in (\alpha, \beta)$ . Stosujemy Twierdzenie Lagrange’a do  $f|_{[\alpha, x]}$  wnioskując jak powyżej, że  $f(\alpha) = f(x)$ . Zatem  $f \equiv f(\alpha)$ . ■

**Twierdzenie 6.2.8 (Cauchy’ego o wartości średniej)** *Niech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$  oraz niech  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  będą ciągłe. Jeśli  $f$  i  $g$  są różniczkowalne w  $(\alpha, \beta)$  oraz pochodna funkcji  $g$  nigdzie się nie zeruje, to*

$$\exists c \in (\alpha, \beta) : \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}.$$

**Dowód:** Z założenia pochodna funkcji  $g$  się nie zeruje, zatem na mocy Twierdzenia 6.2.4 Rolle’a  $g(\alpha) \neq g(\beta)$ .

Od tej chwili dowód jest lekką modyfikacją dowodu Twierdzenia 6.2.6 Lagrange’a.

Niech

$$\phi(x) := f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}(g(x) - g(\alpha)), \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Wtedy  $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na mocy Twierdzenia 5.5.1 o działaniach na funkcjach ciągłych. Jest ona też różniczkowalna w  $(\alpha, \beta)$  na mocy Twierdzenia 6.1.6 o działaniach na pochodnych.

Mamy  $\phi(\alpha) = f(\alpha) = \phi(\beta)$ . Wobec tego na mocy Twierdzenia 6.2.4 Rolle’a istnieje takie  $c \in (\alpha, \beta)$ , że  $\phi'(c) = 0$ , czyli

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} g'(c).$$

■

## 6.3 Własności funkcji różniczkowalnych

### Własność 6.3.1 (Znak pochodnej funkcji monotonicznej)

*Niech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$  i  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna. Jeśli  $f$  jest niemalejąca (odp. *nierosnąca*), to  $f' \geq 0$  (odp.  $f' \leq 0$ ).*

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $a \in (\alpha, \beta)$ .

Jeśli  $f$  jest niemalejąca, to  $x > a \implies f(x) \geq f(a)$ , zatem  $\mathcal{I}_{f,a}(x) \geq 0$ , dla  $x > a$ . Z Twierdzenia 5.3.5 o związku granic jednostronnych z granicą (i Twierdzenie 5.1.9 o zachowaniu nierówności słabej dla funkcji)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \mathcal{I}_{f,a}(x) \geq 0.$$

■

Zauważmy, że silna monotoniczność nie daje silnej nierówności, na przykład funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$  jest silnie rosnąca, a jej pochodna zeruje się w 0.

### Własność 6.3.2 (Monotoniczność ze znaku pochodnej)

Niech  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\alpha < \beta$  oraz  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna. Jeśli  $f' \geq 0$  (odp.  $f' \leq 0$ ), to  $f$  jest niemalejąca (odp. *nierosnąca*). Jeśli  $f' > 0$  (odp.  $f' < 0$ ), to  $f$  jest rosnąca (odp. *malejąca*).

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $x, y$  takie, że  $\alpha < x < y < \beta$ . Stosujemy Twierdzenie 6.2.6 Lagrange’a do  $f|_{[x,y]}$  otrzymując taki punkt  $c \in (x, y)$ , że

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Jeśli  $f'(c) \geq 0$ , to ponieważ  $x < y$ , więc  $f(y) - f(x) \geq 0$ . Natomiast jeśli  $f'(c) > 0$ , to  $f(y) - f(x) > 0$ . ■

W tej własności założenie o przedziale jako dziedzinie funkcji jest ważne. Na przykład funkcja  $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$  ma ujemną pochodną, ale nie jest malejąca, jest tylko malejąca przedziałami.

Twierdzenie 6.2.3 Fermata jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej, ale nie jest wystarczającym, co pokazuje przykład funkcji  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ .

### Twierdzenie 6.3.3 (Warunek wystarczający ekstremum lokalnego)

Niech  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna,  $a \in (\alpha, \beta)$  oraz  $f'(a) = 0$ . Jeśli  $f'$  zmienia znak w  $a$ , to  $f$  ma w  $a$  ekstremum lokalne. Jeśli  $z + na -$ , to maksimum lokalne; jeśli  $z - na +$ , to minimum lokalne.

**Dowód:** Rozważymy pierwszy przypadek. Założenie mówi, że

$$\exists \delta > 0 : f'|_{(a-\delta, a)} > 0 \quad \text{oraz} \quad \exists \eta > 0 : f'|_{(a, a+\eta)} < 0.$$

Na mocy Własności 6.3.2 funkcja  $f|_{(a-\delta, a)}$  jest silnie rosnąca, a funkcja  $f|_{(a, a+\eta)}$  jest silnie malejąca. To oznacza, że  $a - \delta < x < t < a \implies f(x) < f(t)$  oraz  $a < t < x < a + \eta \implies f(x) < f(t)$ . Funkcja  $f$  jest różniczkowalna, więc ciągła (Własność 6.1.4), a stąd

$$\forall x \in (a - \delta, a) : \quad f(x) \leq \lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = f(a)$$

oraz

$$\forall x \in (a, a + \eta) : \quad f(x) \leq \lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = f(a)$$

wobec tych monotoniczności (wykorzystujemy Twierdzenie 5.4.5 o związku ciągłości z granicą, Twierdzenie 5.3.5 o związku granicy i granic jednostronnych oraz Twierdzenie 5.1.9 o zachowaniu nierówności słabej dla funkcji). ■

**Definicja 6.3.4 (o małe)** Niech  $u$  będzie funkcją rzeczywistą określoną w pewnym sąsiedztwie punktu  $0$  (w  $\mathbb{R}$ ). Mówimy, że  $u$  jest  $o(h)$  i piszemy  $u \in o(h)$ , jeśli

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{h} = 0.$$

**Przykład 6.3.5** Funkcja  $\mathbb{R} \ni h \mapsto \sqrt{|h|^3} \in \mathbb{R}$  jest  $o(h)$ , funkcja  $\mathbb{R} \ni h \mapsto \sin^3 h \in \mathbb{R}$  jest  $o(h^2)$ , natomiast funkcja  $\mathbb{R} \ni x \mapsto \cos^2 x \in \mathbb{R}$  jest  $o(x - \frac{\pi}{2})$ .

**Dowód:** Mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h|^3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \sqrt{|h|} = 0$$

na mocy Twierdzenia 5.1.8 o iloczynie funkcji ograniczonej ( $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni h \mapsto \frac{|h|}{h} \in \{-1, 1\}$  jest ograniczona) i zbieżnej do 0.

Mamy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^3 h}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin h}{h} \right)^2 \cdot \sin h = 1 \cdot 0 = 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2 x}{x - \pi/2} &= \left| \begin{array}{l} h := x - \pi/2 \\ x = h + \pi/2 \\ x \rightarrow \pi/2 \iff h \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2(h + \pi/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin h \cdot \frac{\sin h}{h} = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

■

**Własność 6.3.6 (Własności  $o(h)$ )** (i)  $u \in o(h) \implies \lim_{h \rightarrow 0} u(h) = 0$ .

(ii)  $u \in o(h)$  i  $v \in o(h) \implies u + v \in o(h)$ .

(iii)  $u \in o(h)$  i  $v$  jest ograniczona w pewnym sąsiedztwie 0  $\implies uv \in o(h)$ .

(iv)  $u \in o(h) \iff \exists v$  funkcja określona w pewnym otoczeniu 0, ciągła w 0 i taka, że  $v(0) = 0$  oraz  $u(h) = hv(h)$  dla  $h$  z pewnego sąsiedztwa 0.

**Dowód:** (i) Z definicji Cauchy'ego granicy

$$\exists \delta > 0 : \quad 0 < |h| < \delta \implies \left| \frac{u(h)}{h} \right| < 1.$$

Zatem dla  $h \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$  mamy

$$0 \leq |u(h)| < |h|,$$

równoważnie

$$-|h| \leq u(h) \leq |h|$$

i wystarczy skorzystać z Twierdzenia 5.1.6 o trzech funkcjach (i Przykładu 5.1.2).

(ii) Z Twierdzenia 5.2.5 o działaniach na granicach.

(iii) Z Twierdzenia 5.1.8 o iloczynie funkcji ograniczonej i funkcji zbieżnej do 0.

(iv) ( $\implies$ ) Niech  $V$  będzie sąsiedztwem 0, na którym określona jest funkcja  $u$ . Definiujemy

$$v(h) = \begin{cases} \frac{u(h)}{h}, & h \in V; \\ 0, & h = 0 \end{cases}.$$

$v$  jest określona na otoczeniu zera  $V \cup \{0\}$ , ma w 0 wartość 0 i jest ciągła w 0 (na mocy Twierdzenia 5.4.5 o związku ciągłości z granicą). Wprost z definicji funkcji  $v$  wynika, że  $u(h) = hv(h)$  dla  $h \in V$ .

( $\Leftarrow$ ) Z ciągłości  $v$  w 0 oraz z Twierdzenia 5.4.5 o związku ciągłości z granicą

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{hv(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} v(h) = v(0) = 0.$$

■

Zauważmy, że jeśli  $v$  jest nieograniczona w sąsiedztwie 0 i  $u \in o(h)$ , to  $uv$  może nie być funkcją  $o(h)$ . Na przykład jeśli  $u(h) = h^2$ ,  $v(h) = 1/h$ , to  $uv(h) = h$  w  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a to nie jest funkcja  $o(h)$ .

**Twierdzenie 6.3.7 (Peana)** <sup>23</sup> Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem otwartym,  $a \in A$ , niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $c \in \mathbb{R}$ . Wtedy

$$c = f'(a) \iff \left( h \mapsto f(a+h) - f(a) - ch \right) \in o(h).$$

**Dowód:** Połóżmy  $R_{f,a}(h) := f(a+h) - f(a) - ch$ . Ta funkcja jest określona w pewnym otoczeniu punktu 0. Zauważmy, że

$$R_{f,a} \in o(h) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - c \right) = 0.$$

■

---

<sup>23</sup>Giuseppe Peano (1858-1932) - matematyk włoski

**Wniosek 6.3.8 (Wzór Taylora dla pochodnej z resztą Peana)** <sup>24</sup> Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem otwartym oraz  $a \in A$ . Jeśli  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w  $a$ , to istnieje taka funkcja  $R_{f,a} \in o(h)$ , że  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R_{f,a}(h)$  dla  $h$  z pewnego sąsiedztwa  $0$ .

**Dowód:** Wprost z Twierdzenia 6.3.7 Peana można wziąć

$$R_{f,a}(h) := f(a+h) - f(a) - f'(a)h.$$

■

## 6.4 Regularność

Rozważmy teraz zbiór otwarty  $A \subset \mathbb{R}$ , funkcję  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , która jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru  $B \subset A$  i funkcję pochodną  $f' : B \rightarrow \mathbb{R}$ . Czy coś możemy powiedzieć o regularności  $f'$ ? Zauważmy, że wobec Przykładu 6.1.9 wiemy, że dla funkcji wykładniczej  $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ , mamy  $f' \equiv f$ , zatem  $f'$  jest nawet różniczkowalna, a w szczególności ciągła.

**Własność 6.4.1** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym,  $c \in A$ , niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie funkcją ciągłą w  $A$  i różniczkowalną w  $A \setminus \{c\}$ . Jeśli istnieje  $d = \lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ , to  $f$  jest różniczkowalna w  $c$  oraz  $f'(c) = d$ . W szczególności  $f'$  jest ciągła w  $c$ .

**Dowód:** Ustalmy dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A \cap (c, +\infty)$  zbieżny do  $c$ . Na mocy Twierdzenia 6.2.6 Lagrange'a o wartości średniej zastosowanego do funkcji  $f|_{[c, x_n]}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists \xi_n \in (c, x_n) : f'(\xi_n) = \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}.$$

Ponieważ  $\forall n \in \mathbb{N}^* : c < \xi_n < x_n$ , więc z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach  $\xi_n \rightarrow c$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Stąd z definicji Heinego granicy  $f'(\xi_n) \rightarrow d$ .

Wykorzystując założenie oraz definicję Heinego granicy jednostronnej otrzymujemy

$$d = \lim_{x \rightarrow c^+} \mathcal{I}_{f,c}(x).$$

Symetrycznie pokazujemy, że

$$d = \lim_{x \rightarrow c^-} \mathcal{I}_{f,c}(x)$$

i korzystamy z Twierdzenia 5.3.5 o związku granicy z granicami jednostronnymi. ■

---

<sup>24</sup>Brook Taylor (1685-1731) - matematyk angielski

**Przykład 6.4.2** Niech  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie dana przepisem

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Wtedy  $f$  jest różniczkowalna i  $f'$  nie jest ciągła w 0.

**Dowód:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

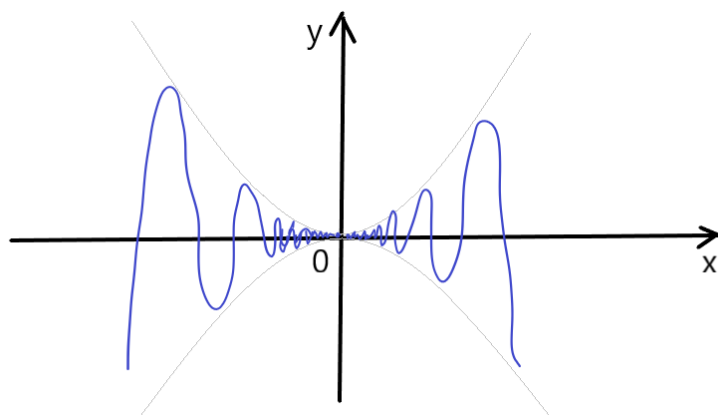
na mocy Twierdzenia 5.1.8 o iloczynie funkcji ograniczonej i zbieżnej do 0. Zatem  $f'(0) = 0$ . Ponadto

$$x \neq 0 \implies f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}.$$

Niech  $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ . Wtedy  $x_n \rightarrow 0$ , natomiast

$$f'(x_n) = 2x_n \cdot 0 + \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \rightarrow 1 \neq 0 = f'(0),$$

zatem z definicji Heinego ciągłości funkcja  $f'$  nie jest ciągła w 0. ■



**Twierdzenie 6.4.3 (Własność wartości pośrednich Darboux pochodnej)**

Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym i niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna. Wtedy  $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$  ma własność wartości pośrednich Darboux.

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $a, b \in A$  takie, że  $a < b$ . Ustalmy dowolne  $\gamma$  leżące pomiędzy  $f'(a)$  i  $f'(b)$ . Chcemy pokazać, że  $\exists c \in [a, b] : f'(c) = \gamma$ . Jeśli  $f'(a) = \gamma$ , to wystarczy wziąć  $c = a$ , jeśli natomiast  $f'(b) = \gamma$ , to  $c = b$ .

Założmy teraz, że  $f'(a) < \gamma < f'(b)$  (drugi przypadek z przeciwnymi nierównościami będzie symetryczny). Definiujemy  $g : A \ni x \mapsto f(x) - \gamma x \in \mathbb{R}$ . Jest to funkcja

różniczkowalna, ponieważ  $f$  jest różniczkowalna. Z założenia  $g'(a) = f'(a) - \gamma < 0$  oraz  $g'(b) = f'(b) - \gamma > 0$ . Ponieważ  $g'(a) < 0$ , zatem z Własności 5.2.4 mówiącej o znaku funkcji w sąsiedztwie granicy niezerowej istnieje takie sąsiedztwo punktu  $a$  w  $A$ , że na nim  $\mathcal{I}_{g,a} < 0$ . W szczególności

$$\exists \delta_1 > 0 : \quad x \in (a, a + \delta_1) \implies g(x) < g(a),$$

bo  $x - a > 0$  i  $(g(x) - g(a))/(x - a) < 0$ . Symetrycznie

$$\exists \delta_2 > 0 : \quad x \in (b - \delta_2, b) \implies g(x) < g(b).$$

Funkcja  $g$  jest różniczkowalna, zatem także ciągła (Własność 6.1.4), więc na mocy Twierdzenia 5.6.6 Weierstrassa o osiągnięciu kresów

$$\exists c \in [a, b] : \quad g(c) = \inf g([a, b]).$$

Ponieważ pokazaliśmy, że  $g$  przyjmuje w  $[a, b]$  wartości mniejsze niż  $g(a)$  i  $g(b)$ , zatem  $c \in (a, b)$ . A ponieważ  $g$  osiąga w  $c$  minimum globalne, zatem na mocy Twierdzenia 6.2.3 Fermata  $g'(c) = 0$ , a to oznacza, że  $f'(c) = \gamma$ . ■

**Definicja 6.4.4 (Klasa  $\mathcal{C}^1$ )** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem otwartym. Mówimy, że  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest *klasy  $\mathcal{C}^1$  na  $A$*  i piszemy  $f \in \mathcal{C}^1(A)$ , jeśli  $f$  jest różniczkowalna i  $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją ciągłą.

Niech  $B \subset \mathbb{R}$ . Mówimy, że  $f$  jest *klasy  $\mathcal{C}^1$  na  $B$* , jeśli istnieje otwarty nadzbiór  $A$  zbioru  $B$  taki, że  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  i  $f$  jest klasy  $\mathcal{C}^1$ .

Pochodna funkcji wykładniczej jest też oczywiście różniczkowalna, zatem możemy mówić o drugiej pochodnej (pochodnej funkcji pochodnej).

**Definicja 6.4.5 ( $n$ -ta pochodna i klasa  $\mathcal{C}^n$ )** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie otwarty,  $a \in A$  oraz niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna. Jeśli funkcja pochodna  $f' : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna w  $a$ , to jej pochodną nazywamy *drugą pochodną* funkcji  $f$  w punkcie  $a$  i oznaczamy  $f^{(2)}(a) = f''(a) := (f')'(a)$ .

Rekurencyjnie definiujemy  *$n$ -tą pochodną* funkcji  $f$  w  $a$  dla  $n \geq 2$ : jeśli istnieje  $f^{(n-1)} : A \rightarrow \mathbb{R}$  i jest różniczkowalna w  $a$ , to  $f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$ . Jeśli ta  $n$ -ta pochodna istnieje, to mówimy, że  $f$  jest  *$n$ -krotnie różniczkowalna* w  $a$ .

Jeśli istnieje  $n$ -ta pochodna  $f^{(n)} : A \rightarrow \mathbb{R}$  i jest ona ciągła, to mówimy, że  $f$  jest *klasy  $\mathcal{C}^n$  na  $A$*  i piszemy  $f \in \mathcal{C}^n(A)$ .

Mówimy, że  $f$  jest *klasy  $\mathcal{C}^\infty$  na  $A$* , jeśli istnieją jej wszystkie pochodne.

Uwaga: Dla wygody czasami piszemy  $f^{(0)} = f$  i  $f^{(1)} = f'$ , a także  $\mathcal{C}^0(A) = \mathcal{C}(A)$ .

Zwróćmy także uwagę, że ze względu na lokalność różniczkowalności (por. Własność 6.1.5), jeśli chcemy zdefiniować  $n$ -tą pochodną funkcji w pewnym punkcie wystarczy, żeby istniała  $(n - 1)$ -sza pochodna tej funkcji w pewnym otoczeniu tego punktu, niekoniecznie w całej dziedzinie.

**Przykład 6.4.6** Funkcja  $f$  dana wzorem  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)x^2/2$  jest klasy  $\mathcal{C}^1$  na  $\mathbb{R}$ , ale nie istnieje jej druga pochodna w punkcie 0. Funkcja  $g$  dana wzorem

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

jest dwukrotnie różniczkowalna, ale  $g''$  nie jest ciągła w 0. Funkcja  $h$  dana wzorem  $h(x) = \operatorname{sgn}(x)x^3/6$  jest klasy  $\mathcal{C}^2$  na  $\mathbb{R}$ , ale nie jest trzykrotnie różniczkowalna w 0. Dowolny wielomian jest klasy  $\mathcal{C}^\infty$ , a jeśli  $n$  jest większe od jego stopnia, to jego  $n$ -ta pochodna jest funkcją stale równą 0.

**Dowód:** Zauważmy, że  $f'(x) = |x|$  i  $h''(x) = |x|$ . Reszta – ćwiczenie. ■

**Twierdzenie 6.4.7 (Łączność operacji brania pochodnych wyższego rzędu)**  
Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie zbiorem otwartym,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}^*$ . Jeśli  $f$  jest  $(n + k)$ -krotnie różniczkowalna, to  $f^{(n)}$  jest  $k$ -krotnie różniczkowalna oraz  $f^{(n+k)} = (f^{(n)})^{(k)}$ .

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $n \in \mathbb{N}^*$ . Indukcja ze względu na  $k$ .

I. Załóżmy,  $f$  jest  $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna. Z definicji  $(n+1)$ -szej pochodnej  $f^{(n)}$  jest różniczkowalna oraz  $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ .

II. Ustalmy teraz  $k \in \mathbb{N}^*$ , załóżmy, że teza zachodzi dla  $k$  oraz że  $f$  jest  $(n+k+1)$ -krotnie różniczkowalna. Korzystamy z definicji i z założenia indukcyjnego

$$f^{(n+k+1)} = (f^{(n+k)})' = ((f^{(n)})^{(k)})' = (f^{(n)})^{(k+1)},$$

ckdi. ■

**Twierdzenie 6.4.8** Jeśli  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \subset \mathbb{R}$  jest otwarty,  $c \in \mathbb{R}$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  są  $n$ -krotnie różniczkowalne, to  $f+g$ ,  $cf$  i  $fg$  są  $n$ -krotnie różniczkowalne i zachodzą wzory

- $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ ;
- $(cf)^{(n)} = cf^{(n)}$ ;
- $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$  (*Wzór Leibniza*<sup>25</sup>).

<sup>25</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) - historyk i matematyk niemiecki

Tam, gdzie  $g$  nie zeruje się (to może być istotnie mniejszy zbiór),  $f/g$  jest też  $n$ -krotnie różniczkowalna.

Jeśli ponadto  $B \subset \mathbb{R}$  otwarty,  $f(A) \subset B$  i  $h : B \rightarrow \mathbb{R}$  jest  $n$ -krotnie różniczkowalna, to  $h \circ f$  jest też  $n$ -krotnie różniczkowalna.

**Dowód:** Indukcyjny względem  $n$ . Pierwszy krok to Twierdzenie 6.1.6 o działaniach na pochodnych oraz Twierdzenie 6.1.7 o pochodnej funkcji złożonej. Przekazywanie – pokażemy tylko dla iloczynu i wykażemy wzór Leibniza. Pozostałe przypadki – ćwiczenie.

Zatem w kroku przekazywania zakładamy, że dla pewnego  $n \in \mathbb{N}^*$  zachodzi wzór Leibniza dla dowolnych dwóch funkcji  $n$ -krotnie różniczkowalnych. Niech teraz  $f$  i  $g$  będą  $(n+1)$ -krotnie różniczkowalne. W szczególności są oczywiście  $n$ -krotnie różniczkowalne i z założenia indukcyjnego zachodzi

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Zauważmy, że  $f'$  i  $g'$  są  $n$ -krotnie różniczkowalne na mocy Twierdzenia 6.4.7 o łączności brania pochodnych wyższego rzędu. Zatem wobec Twierdzenia 6.1.6 o działaniach na pochodnych  $(fg)' = f'g + fg'$  jest  $n$ -krotnie różniczkowalna, więc  $fg$  jest  $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna znowu z Twierdzenia 6.4.7. Wobec tego z definicji, założenia indukcyjnego, wzoru na pochodną sumy i iloczynu

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) = \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j+1)} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n-j+1)} = \\ &= \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{j=1}^n \left( \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right) f^{(j)} g^{(n-j+1)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} = \\ &= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} f^{(j)} g^{(n-j+1)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} = \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} f^{(j)} g^{(n-j+1)}, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny. ■

## 6.5 Wielomian Taylora

**Lemat 6.5.1** Niech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$  oraz  $v : \mathbb{K} \ni x \mapsto \sum_{k=0}^n b_k(x-a)^k \in \mathbb{K}$ .

Wtedy

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} : \quad v^{(k)}(a) = k!b_k.$$

Ponadto  $\forall k > n : v^{(k)} \equiv 0$ .

**Dowód:** Funkcja  $v$  jako wielomian jest klasy  $\mathcal{C}^\infty$ . Zauważmy, że  $v^{(0)}(a) = v(a) = b_0$ .

Napiszmy jeszcze, że dla  $k \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} v(x) &= b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + \\ &\quad + b_{k-1}(x-a)^{k-1} + b_k(x-a)^k + b_{k+1}(x-a)^{k+1} + \dots + \\ &\quad + b_n(x-a)^n; \\ v'(x) &= b_1 + 2b_2(x-a) + \dots + \\ &\quad + (k-1)b_{k-1}(x-a)^{k-2} + kb_k(x-a)^{k-1} + (k+1)b_{k+1}(x-a)^k + \dots + \\ &\quad + nb_n(x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

Niech  $k \in \{1, \dots, n\}$ , mamy

$$\begin{aligned} (6.1) \quad v^{(k)}(x) &= k!b_k + \\ &\quad + (k+1)k(k-1) \cdot \dots \cdot 2b_{k+1}(x-a) + \\ &\quad + (k+2)(k+1)k \cdot \dots \cdot 3b_{k+2}(x-a)^2 + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)b_n(x-a)^{n-k}, \end{aligned}$$

zatem  $v^{(k)}(a) = k!b_k$ . Ponadto  $v^{(n)} \equiv n!b_n$ , a stąd wynika, że wszystkie kolejne pochodne są zerowe. ■

**Twierdzenie 6.5.2** Niech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ . Wtedy istnieje dokładnie jeden wielomian  $W : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  stopnia co najwyżej  $n$  i taki, że  $\forall k \in \{0, \dots, n\} : W^{(k)}(a) = c_k$ .

**Dowód:** Niech  $W(x) = \sum_{k=0}^n \frac{c_k}{k!}(x-a)^k$  dla  $x \in \mathbb{K}$ . Jest to wielomian stopnia co najwyżej  $n$ . Wobec Lematu 6.5.1 mamy  $W^{(k)}(a) = k! \frac{c_k}{k!} = c_k$ .

Niech teraz  $U$  będzie wielomianem stopnia co najwyżej  $n$ , czyli  $U(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k$  dla  $x \in \mathbb{K}$ . Stosując wzór (1.4) na dwumian Newtona możemy zapisać

$$U(x) = \sum_{k=0}^n d_k (a+x-a)^k = \sum_{k=0}^n d_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^{k-j} (x-a)^j.$$

Zatem

$$\begin{aligned} U(x) = & \binom{n}{n} d_n (x-a)^n + \\ & + \left( \binom{n}{n-1} d_n a + \binom{n-1}{n-1} d_{n-1} \right) (x-a)^{n-1} + \\ & + \left( \binom{n}{n-2} d_n a^2 + \binom{n-1}{n-2} d_{n-1} a + \binom{n-2}{n-2} d_{n-2} \right) (x-a)^{n-2} + \\ & + \dots + \\ & + \left( \binom{n}{2} d_n a^{n-2} + \binom{n-1}{2} d_{n-1} a^{n-3} + \dots + \binom{3}{2} d_3 a + \binom{2}{2} d_2 \right) (x-a)^2 + \\ & + \left( \binom{n}{1} d_n a^{n-1} + \binom{n-1}{1} d_{n-1} a^{n-2} + \dots + \binom{3}{1} d_3 a^2 + \binom{2}{1} d_2 a + \binom{1}{1} d_1 \right) (x-a) + \\ & + \left( \binom{n}{0} d_n a^n + \binom{n-1}{0} d_{n-1} a^{n-1} + \dots + \binom{3}{0} d_3 a^3 + \binom{2}{0} d_2 a^2 + \binom{1}{0} d_1 a + \binom{0}{0} d_0 \right). \end{aligned}$$

Jeśli założymy, że  $\forall k \in \{0, \dots, n\} : U^{(k)}(a) = c_k$ , to z Lematu 6.5.1 wynika, że

$$\begin{aligned} c_n &= n! d_n, \\ c_{n-1} &= (n-1)! (n d_n a + d_{n-1}), \\ c_{n-2} &= (n-2)! \left( \binom{n}{n-2} d_n a^2 + (n-1) d_{n-1} a + d_{n-2} \right), \\ &\vdots \\ c_2 &= 2! \left( \binom{n}{2} d_n a^{n-2} + \binom{n-1}{2} d_{n-1} a^{n-3} + \dots + 3 d_3 a + d_2 \right), \\ c_1 &= n d_n a^{n-1} + (n-1) d_{n-1} a^{n-2} + \dots + 3 d_3 a^2 + 2 d_2 a + d_1, \\ c_0 &= d_n a^n + d_{n-1} a^{n-1} + \dots + d_3 a^3 + d_2 a^2 + d_1 a + d_0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że w tym układzie z pierwszego równania wyznaczamy jednoznacznie  $d_n$ , wtedy z drugiego  $d_{n-1}$  i tak dalej. Stąd jednoznaczność wielomianu z tezy.  $\blacksquare$

**Definicja 6.5.3 (Wielomian Taylora)** Niech  $A$  będzie otwarty w  $\mathbb{K}$ ,  $a \in A$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  i niech  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  będzie  $n$ -krotnie różniczkowalna w  $a$ . Wtedy  $n$ -tym wielomianem Taylora funkcji  $f$  o środku w punkcie  $a$  nazywamy

$$T_{f,a}^n : \mathbb{K} \ni x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \in \mathbb{K}.$$

Przyjmujemy ponadto  $T_{f,a}^0 \equiv f(a)$ .

Zauważmy także, że można zapisać

$$T_{f,a}^n(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k, \quad h \in \mathbb{K}.$$

**Przykład 6.5.4 1.**

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad T_{\sin,0}^3(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

2. Jeśli  $d \in \mathbb{N}^*$  i  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest wielomianem stopnia  $d$ , to  $\forall n \geq d \quad \forall a \in \mathbb{R} : T_{f,a}^n \equiv f$ .

**Dowód:** 1.  $\sin' = \cos$ ,  $\cos' = -\sin$ .

2. Z Lematu 6.5.1 i Twierdzenia 6.5.2. ■

**Własność 6.5.5 (Własności wielomianu Taylora)** Niech  $A$  będzie otwarty w  $\mathbb{K}$ ,  $a \in A$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  i niech  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  będzie  $n$ -krotnie różniczkowalna w  $a$ . Wtedy

$$(6.2) \quad \forall k \in \{0, \dots, n\} : \quad (T_{f,a}^n)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Ponadto

$$(6.3) \quad \forall k \in \{0, \dots, n\} : \quad (T_{f,a}^n)^{(k)} = T_{f^{(k)},a}^{n-k}.$$

**Dowód:** (6.2) wynika wprost z Lematu 6.5.1 i definicji wielomianu Taylora.

(6.3) wynika z (6.1) (można też bezpośrednio rozpisać – ćwiczenie). ■

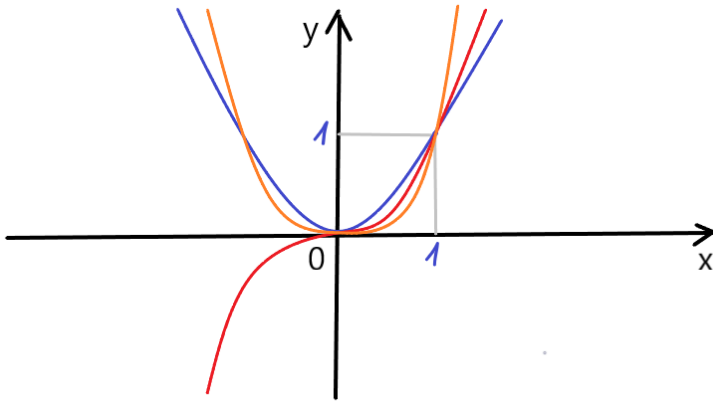
**Definicja 6.5.6 (Funkcja  $k$ -płaska)** Niech  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  będzie otwarty w  $\mathbb{K}$ ,  $a \in A$  i niech  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ . Mówimy, że  $f$  jest  $k$ -płaska w  $a$ , jeśli jest  $k$ -krotnie różniczkowalna w  $a$ , oraz

$$\forall j \in \{0, \dots, k\} : \quad f^{(j)}(a) = 0.$$

**Przykład 6.5.7** 1.  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \text{wielomian } W_n : \mathbb{K} \ni x \mapsto x^{n+1} \in \mathbb{K} \text{ jest } n\text{-płaski w } 0.$

2.  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \text{funkcja } f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dana wzorem } f_n(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \text{ jest}$   
 klasy  $C^n$  i nie jest  $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna w 0. Jest ona  $n$ -płaska w 0.

**Dowód:**



ćwiczenie. ■

**Twierdzenie 6.5.8 (O funkcji  $k$ -płaskiej)** Niech  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  będzie otwarty w  $\mathbb{R}$ ,  $a \in A$ . Jeśli  $f$  jest  $k$ -płaska w  $a$ , to  $f \in o((x-a)^k)$ .

**Dowód:** Indukcja względem  $k$ .

I. Niech  $f$  będzie 1-płaska w  $a$ . To znaczy, że  $f$  jest różniczkowalna w  $a$  i  $f(a) = f'(a) = 0$ .

Na mocy Wzoru Taylora dla pochodnej z resztą Peana (Wniosek 6.3.8) istnieje taka funkcja  $R_{f,a} \in o(h)$ , że  $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R_f(h)$  dla  $h$  z pewnego sąsiedztwa  $V$  punktu 0. Z założenia  $f(a) = f'(a) = 0$ , zatem  $f(a+h) = R_f(h)$  dla  $h \in V$ . Niech  $x \in A$ . Jeśli  $x \neq a$  jest dostatecznie blisko  $a$ , to  $h = x - a \in V$  i mamy wtedy  $f(x) = R_f(x-a)$ . Zatem  $f \in o(x-a)$ .

II. Załóżmy teraz, że teza twierdzenia zachodzi dla wszystkich funkcji  $k$ -płaskich dla pewnego ustalonego  $k$ . Niech teraz  $f$  będzie  $(k+1)$ -płaska w  $a$ . Wtedy  $f'$  jest  $k$ -płaska w  $a$  (por. Twierdzenie 6.4.7). Chcemy pokazać, że

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x-a)^{k+1}} = 0.$$

Niech  $U$  będzie takim otoczeniem otwartym spójnym punktu  $a$  (czyli pewnym przedziałem otwartym), na którym istnieje  $f^{(k)}$  (ono istnieje z definicji pochodnej  $f^{(k+1)}(a)$ ).

Policzymy granice jednostronne korzystając z definicji Heinego.

Ustalmy zatem dowolny  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset U \cap (a, +\infty)$  taki, że  $x_n \rightarrow a$ . Ustalmy dowolne  $n \in \mathbb{N}^*$ . Stosujemy Twierdzenie 6.2.8 Cauchy'ego o wartości średniej do funkcji  $f|_{[a, x_n]}$  i  $g|_{[a, x_n]}$ , gdzie  $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto (x - a)^{k+1} \in \mathbb{R}$ , otrzymując

$$(6.4) \quad \exists c_n \in (a, x_n) : \quad \frac{f'(c_n)}{(k+1)(c_n - a)^k} = \frac{f(x_n) - f(a)}{(x_n - a)^{k+1} - (a - a)^{k+1}} = \frac{f(x_n)}{(x_n - a)^{k+1}}.$$

Zauważmy, że skoro  $\forall n \in \mathbb{N}^* : a < c_n < x_n$ , to z Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach  $c_n \rightarrow a$ . Ponieważ  $f'$  jest  $k$ -płaska w  $a$ , więc z założenia indukcyjnego

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{(x - a)^k} = 0,$$

a stąd z definicji Heinego

$$\frac{f'(c_n)}{(c_n - a)^k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wobec tego z (6.4)

$$\frac{f(x_n)}{(x_n - a)^{k+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Z dowolności wyboru ciągu  $(x_n)_{n=1}^\infty$  pokazaliśmy, że

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{(x - a)^{k+1}} = 0.$$

Granice lewostronną liczymy symetrycznie: Ustalamy dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset U \cap (-\infty, a)$  taki, że  $x_n \rightarrow a$ . Następnie stosujemy Twierdzenie 6.2.8 Cauchy'ego o wartości średniej do funkcji  $f|_{[x_n, a]}$  i  $g|_{[x_n, a]}$  i postępujemy jak powyżej.

Korzystamy z Twierdzenia 5.3.5 o związku granicy z granicami jednostronnymi.

To kończy dowód indukcyjny. ■

## 6.6 Wzór Taylora

**Definicja 6.6.1 (Reszta)** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym,  $a \in A$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie  $n$ -krotnie różniczkowalna w  $a$ . Przyjmujemy oznaczenie na  *$n$ -tą resztę*

$$R_{f,a}^n(x) := f(x) - T_{f,a}^n(x), \quad \text{dla } x \in A.$$

Dodatkowo przyjmujemy  $\forall x \in A : R_{f,a}^0(x) := f(x) - f(a)$ .

Zauważmy, że można zapisać

$$R_{f,a}^n(a+h) = f(a+h) - T_{f,a}^n(a+h)$$

dla  $h$  z pewnego otoczenia 0.

**Własność 6.6.2 (Własności reszt)** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym,  $a \in A$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  oraz niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie  $n$ -krotnie różniczkowalna w  $a$ . Wtedy  $R_{f,a}^n$  jest  $n$ -płaska w  $a$ .

Ponadto niech  $U$  będzie otoczeniem punktu  $a$  w  $A$ . Wtedy:

1. Jeśli  $f|_U$  jest  $(n-1)$ -krotnie różniczkowalna, to  
 $\forall k \in \{0, \dots, n-1\} \forall x \in U : (R_{f,a}^n)^{(k)}(x) = R_{f^{(k)},a}^{n-k}(x)$ .
2. Jeśli  $f|_U$  jest  $n$ -krotnie różniczkowalna, to  
 $\forall x \in U : (R_{f,a}^n)^{(n)}(x) = R_{f^{(n)},a}^0(x)$ .
3. Jeśli  $f|_U$  jest  $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna, to  
 $\forall x \in U : (R_{f,a}^n)^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ .

**Dowód:** Reszta jest sumą funkcji, dlatego stosujemy tu tezę Twierdzenia 6.4.8 o  $n$ -tej pochodnej sumy.

Z (6.2) wynika, że  $R_{f,a}^n$  jest  $n$ -płaska w  $a$ .

Punkty 1 i 2 wynikają z (6.3). Punkt 3 jest konsekwencją ostatniej tezy Lematu 6.5.1. ■

**Twierdzenie 6.6.3 (Wzór Taylora z resztą Peana)** Niech  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  będzie otwartą w  $\mathbb{R}$ ,  $a \in A$  i niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie  $n$ -krotnie różniczkowalna w  $a$ . Wtedy

$$\exists R_n \in o((x-a)^n) \forall x \text{ z pewnego sąsiedztwa } a : \\ f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(x-a)^n + R_n(x).$$

**Dowód:** Zauważmy, że  $R_n = f - T_{f,a}^n = R_{f,a}^n$ . Wobec Własności 6.6.2 reszta funkcja  $R_{f,a}^n$  jest  $n$ -płaska w  $a$ . Wystarczy skorzystać z Twierdzenia 6.5.8 o funkcji  $n$ -płaskiej. ■

Funkcję  $R_n$  występującą w powyższym twierdzeniu nazywamy  $n$ -tą resztą Peana we wzorze Taylora.

Jeśli  $a = 0$  we wzorze Taylora, to mówimy o [wzorze Maclaurina](#)<sup>26</sup>.

Zauważmy, że ten wzór możemy napisać także w postaci

$\exists Q_n \in o(h^n) \forall h$  z pewnego sąsiedztwa 0 :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}h^n + Q_n(h).$$

**Przykład 6.6.4**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$

**Dowód:** Na mocy Wzoru Taylora z resztą Peana (Twierdzenie 6.6.3) oraz Przykładu 6.5.4

$$\sin x = T_{\sin,0}^3(x) + R_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x).$$

Zatem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{6} - \frac{R_3(x)}{x^3} \right) = \frac{1}{6},$$

bo  $R_3 \in o(x^3)$ . ■

### Twierdzenie 6.6.5 (Warunek wystarczający ekstremum)

Niech  $A$  będzie otwarty w  $\mathbb{R}$ ,  $a \in A$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  i niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie  $(k+1)$ -krotnie różniczkowalna w  $a$ . Załóżmy, że  $\forall j \in \{1, \dots, k\} : f^{(j)}(a) = 0$  oraz  $f^{(k+1)}(a) \neq 0$ . Jeśli  $k$  jest liczbą parzystą, to  $f$  nie ma ekstremum w  $a$ . Jeśli  $k$  jest liczbą nieparzystą i  $f^{(k+1)}(a) > 0$  (odp.  $f^{(k+1)}(a) < 0$ ), to  $f$  ma w  $a$  silne minimum (odp. **maksimum**) lokalne.

**Dowód:** Ze Wzoru Taylora z resztą Peana (Twierdzenie 6.6.3) i z założenia

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + R_{k+1}(x),$$

dla  $x$  z pewnego sąsiedztwa punktu  $a$ , przy czym  $R_{k+1} \in o((x-a)^{k+1})$ .

Z Własności 6.3.6 funkcji  $o(h)$  istnieje funkcja  $v$  określona w otoczeniu punktu  $a$ , ciągła w  $a$  i taka, że  $v(a) = 0$  oraz  $R_{k+1}(x) = v(x)(x-a)^{k+1}$ . Niech  $r(x) = v(x) + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}$ . W pewnym otoczeniu punktu  $a$  funkcja  $r$  przyjmuje wartości tego samego znaku, co  $f^{(k+1)}(a)$  (co wynika z Własności 5.2.4 mówiącej o znaku funkcji w sąsiedztwie granicy niezerowej).

---

<sup>26</sup>Colin Maclaurin (1698-1746) – matematyk szkocki

Mamy

$$f(x) = f(a) + r(x)(x-a)^{k+1},$$

więc jeśli  $k$  jest parzyste, to  $f$  przyjmuje blisko punktu  $a$  wartości zarówno większe jak i mniejsze od  $f(a)$ . Natomiast, jeśli  $k$  jest nieparzyste i  $f^{(k+1)}(a) > 0$ , to w tym małym sąsiedztwie punktu  $a$  funkcja  $f$  przyjmuje wartości silnie większe od  $f(a)$ . ■

**Przykład 6.6.6** Niech  $n \in \mathbb{N}^*$ . Wielomian  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$  ma w 0 minimum, jeśli  $n$  jest parzyste, natomiast nie ma ekstremum, jeśli  $n$  jest nieparzyste.

**Dowód:** ćwiczenie. ■

**Twierdzenie 6.6.7 (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a)** Niech  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym,  $a \in A$  i niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie  $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna. Wtedy dla dowolnego  $x \in A \setminus \{a\}$  istnieje  $c$  leżące pomiędzy  $a$  i  $x$ , przy czym  $a \neq c \neq x$ , i takie, że

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Dowód:** Zauważmy, że dla  $n=0$  jest to po prostu Twierdzenie 6.2.6 Lagrange'a o wartości średniej.

Niech teraz  $n \in \mathbb{N}^*$ . Chcemy pokazać, że

$$R_{f,a}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Wobec Własności 6.6.2 reszt funkcja  $R_{f,a}^n$  jest  $n$ -płaska w  $a$ . Ponadto  $(R_{f,a}^n)^{(n+1)} \equiv f^{(n+1)}$ .

Niech  $g : \mathbb{R} \ni t \mapsto (t-a)^{n+1} \in \mathbb{R}$  i  $R = R_{f,a}^n$ . Będziemy  $(n+1)$ -krotnie stosować Twierdzenie 6.2.8 Cauchy'ego o wartości średniej kolejno do funkcji  $R$  i  $g$ ;  $R'$  i  $g'$ ; ...; wreszcie  $R^{(n)}$  i  $g^{(n)}$ .

Dla  $R$  i  $g$  zacieśnionych do przedziału o końcach  $a$  i  $x$  otrzymujemy w tym przedziale otwartym taki punkt  $\theta_{n+1}$ , że

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R(x) - R(a)}{(x-a)^{n+1} - (a-a)^{n+1}} = \frac{R'(\theta_{n+1})}{(n+1)(\theta_{n+1}-a)^n}.$$

Drugą parę funkcji rozważamy na przedziale o końcach  $a$  i  $\theta_{n+1}$ , znajdując w jego wnętrzu taki punkt  $\theta_n$ , że

$$\frac{R'(\theta_{n+1})}{(n+1)(\theta_{n+1}-a)^n} = \frac{R'(\theta_{n+1}) - R'(a)}{(n+1)(\theta_{n+1}-a)^n - (n+1)(a-a)^n} = \frac{R''(\theta_n)}{(n+1)n(\theta_n-a)^{n-1}}$$

i tak dalej. Ostatecznie otrzymamy

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}(\theta_1)}{(n+1)!(\theta_1-a)^0} = \frac{f^{(n+1)}(\theta_1)}{(n+1)!}.$$

Wystarczy wziąć  $c := \theta_1$  i mamy

$$R_{f,a}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

■

Otrzymana tu funkcja  $R(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$  jest nazywana **resztą Lagrange'a**.

## 7 O pewnych rodzajach funkcji

### 7.1 Funkcje monotoniczne

Podrozdział dotyczy tylko zbioru liczb rzeczywistych. To znaczy  $A \subset \mathbb{R}$  i będziemy rozważać tylko funkcje  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

#### Twierdzenie 7.1.1 (O granicach jednostronnych funkcji monotonicznej)

Niech  $A \subset \mathbb{R}$ . Jeśli  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest niemalejąca i  $a$  jest prawostronnym (odpowiednio lewostronnym) punktem skupienia  $A$ , to istnieje granica prawostronna (odpowiednio lewostronna) funkcji  $f$  w  $a$  i mamy

$$(7.1) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf f(A \cap (a, +\infty)) \quad (\text{odp. } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup f(A \cap (-\infty, a))).$$

Symetrycznie, jeśli  $f$  jest nierosnąca i  $a$  jest prawostronnym (odpowiednio lewostronnym) punktem skupienia  $A$ , to istnieje granica prawostronna (odpowiednio lewostronna) funkcji  $f$  w  $a$  i mamy

$$(7.2) \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup f(A \cap (a, +\infty)) \quad (\text{odp. } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \inf f(A \cap (-\infty, a))).$$

Ta jednostronna granica może być niewłaściwa, ale tylko jeśli  $A \cap (-\infty, a] = \emptyset$  (odpowiednio  $A \cap [a, +\infty) = \emptyset$ ).

**Dowód:** Niech  $f$  będzie niemalejąca i niech  $a$  będzie prawostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ .

Z definicji prawostronnego punktu skupienia zbiór  $A \cap (a, +\infty)$  jest niepusty. Zatem także  $B := f(A \cap (a, +\infty))$  jest niepusty. Pokażemy, że  $\inf B$  jest szukaną granicą prawostronną.

Rozważymy teraz dwa przypadki.

I. Zbiór  $B$  jest ograniczony od dołu. Wtedy na mocy Aksjomatu Dedekinda (Twierdzenie 1.4.9) istnieje  $\alpha := \inf B \in \mathbb{R}$ .

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ  $\alpha + \varepsilon$  nie jest minorantą zbioru  $B$ , zatem istnieje takie  $z \in B$ , że  $z < \alpha + \varepsilon$ . Z definicji obrazu istnieje takie  $t \in A \cap (a, +\infty)$ , że  $z = f(t)$ . Niech  $\delta := t - a$ . Jest to liczba dodatnia. Jeśli  $x \in A$  i  $0 < x - a < \delta$ , to  $a < x < t$ , czyli  $f(x) \leq f(t)$  z monotoniczności funkcji  $f$ . Z poprzednich założeń i definicji  $\alpha$  zatem mamy  $\alpha - \varepsilon \leq f(x) \leq f(t) < \alpha + \varepsilon$ . Pokazaliśmy, że

$$\forall x \in A : \quad 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Ponieważ wybraliśmy  $\varepsilon$  dowolne, zatem z definicji Cauchy'ego granicy jednostronnej  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$ .

II.  $B$  nie jest ograniczony od dołu. Wtedy  $\inf B = -\infty$ .

Ustalmy dowolne  $M \in \mathbb{R}$ . Nie jest to minoranta zbioru  $B$ , zatem istnieje takie  $w \in B$ , że  $w < M$ . Z definicji obrazu istnieje takie  $s \in A \cap (a, +\infty)$ , że  $w = f(s)$ . Niech teraz  $\delta := s - a$ . Jest to liczba dodatnia i jeśli  $x \in A$  i  $0 < x - a < \delta$ , to  $x < s$ , czyli  $f(x) \leq f(s)$  z monotoniczności funkcji  $f$ . Wynika stąd, że

$$\forall x \in A: \quad 0 < x - a < \delta \implies f(x) < M.$$

Ponieważ wybraliśmy  $M$  dowolnie, więc to oznacza z definicji Cauchy'ego niewłaściwej granicy jednostronnej, że  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ .

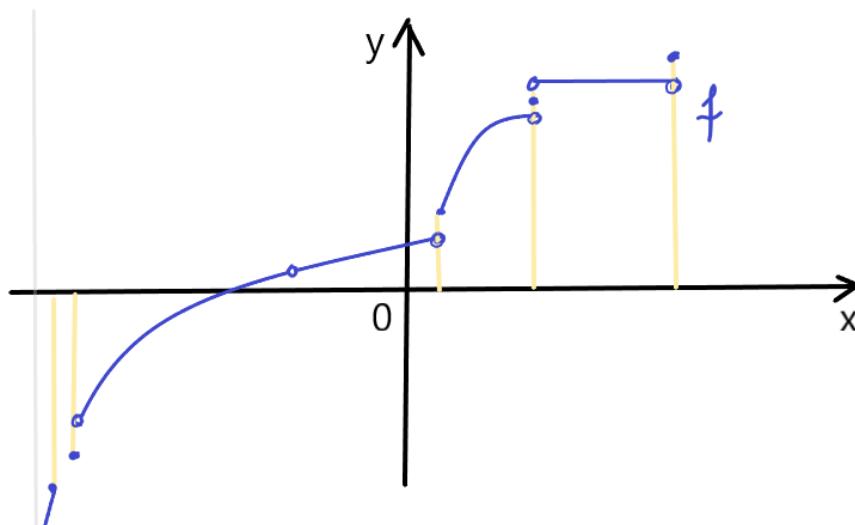
Zauważmy wreszcie, że jeśli założymy, że  $A \cap (-\infty, a] \neq \emptyset$ , to zachodzi I przypadek. Istotnie, niech  $b \in A \cap (-\infty, a]$ . Wtedy jeśli  $x \in A \cap (a, +\infty)$ , to  $x > b$ , czyli  $f(x) \geq f(b)$  z monotoniczności funkcji  $f$ . Zatem  $f(b)$  jest minorantą zbioru  $B$ , a to oznacza, że jest on ograniczony od dołu. ■

**Wniosek 7.1.2** Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest niemalejąca i  $a \in A$  jest prawostronnym (odp. lewostronnym) punktem skupienia zbioru  $A$  to

$$f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \left( \text{odp. } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \right).$$

Dla funkcji nierosnącej nierówności są przeciwne.

**Dowód:** Z faktu, że funkcja  $f$  jest niemalejąca, wynika, że  $f(a)$  jest minorantą zbioru  $B = f(A \cap (a, +\infty))$ . Z (7.1) wiemy, że  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf B$ . Zatem nierówność z tezy wynika z definicji infimum. ■



**Twierdzenie 7.1.3 (Punkty nieciągłości funkcji monotonicznej)**

Funkcja monotoniczna ma co najwyżej przeliczalną ilość punktów nieciągłości.

**Dowód:** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie niemalejąca oraz niech

$$Z := \{z \in A : f \text{ jest nieciągła w } z\}.$$

Mamy pokazać, że  $Z$  jest co najwyżej przeliczalny.

Ustalmy dowolny  $z \in Z$ , wobec Wniosku 5.4.2 wiemy, że  $z$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ . Będziemy korzystać z Wniosku 7.1.2 (o nierównościach między wartością funkcji i granicami jednostronnymi, jeśli one istnieją). Możliwe są trzy przypadki:

1.  $z$  jest zarówno lewostronnym, jak i prawostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ . Mamy  $\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) \leq f(z) \leq \lim_{x \rightarrow z^+} f(x)$  z Wniosku 7.1.2. Ponieważ  $f$  jest nieciągła w  $z$ , zatem

$$\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow z^+} f(x),$$

bo gdyby była równość, to mielibyśmy ciągłość. Kładziemy

$$\Delta_z := \left( \lim_{x \rightarrow z^-} f(x), \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) \right).$$

2.  $z$  jest prawostronnym, ale nie jest lewostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ . Wtedy

$$f(z) < \lim_{x \rightarrow z^+} f(x)$$

i definiujemy

$$\Delta_z := \left( f(z), \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) \right).$$

3.  $z$  jest lewostronnym, ale nie jest prawostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ . Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) < f(z)$$

i definiujemy

$$\Delta_z := \left( \lim_{x \rightarrow z^-} f(x), f(z) \right).$$

Rozważmy  $\{\Delta_z : z \in Z\}$ . Jest to rodzina zbiorów otwartych w  $\mathbb{R}$  i niepustych. Trzeba pokazać, że zbiory te są parami rozłączne.

Ustalmy dowolne  $z, w \in Z$  i założmy (bez straty ogólności), że  $z < w$ . Chcemy pokazać, że  $\Delta_z \cap \Delta_w = \emptyset$ . Niech  $\Delta_z = (a, b)$  i  $\Delta_w = (c, d)$ . Wystarczy pokazać, że  $b \leq c$ . Mamy

$$\left( b = f(z) \text{ lub } b = \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) \right) \text{ oraz } \left( c = \lim_{x \rightarrow w^-} f(x) \text{ lub } c = f(w) \right).$$

Przypomnijmy, że z (7.1) wynika, że

$$(7.3) \quad \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \inf f(A \cap (z, +\infty)) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow w^-} f(x) = \sup f(A \cap (-\infty, w)),$$

o ile te granice istnieją (to znaczy punkty są odpowiednimi jednostronnymi punktami skupienia).

Rozważamy przypadki

I.  $b = f(z)$ ,  $c = f(w)$ . Ponieważ  $f$  jest niemalejąca, więc  $b = f(z) \leq f(w) = c$ .

II.  $b = f(z)$ ,  $c = \lim_{x \rightarrow w^-} f(x)$ . Ponieważ  $z < w$ , więc  $f(z) \in f(A \cap (-\infty, w))$ , zatem wobec (7.3)

$$b = f(z) \leq \sup f(A \cap (-\infty, w)) = \lim_{x \rightarrow w^-} f(x) = c.$$

III.  $b = \lim_{x \rightarrow z^+} f(x)$ ,  $c = f(w)$ . Ponieważ  $z < w$ , więc  $f(w) \in f(A \cap (z, +\infty))$ , zatem wobec (7.3)

$$b = \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \inf f(A \cap (z, +\infty)) \leq f(w) = c.$$

IV.  $b = \lim_{x \rightarrow z^+} f(x)$ ,  $c = \lim_{x \rightarrow w^-} f(x)$ . W szczególności  $z$  jest prawostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , więc istnieje takie  $v \in A$ , że  $z < v < w$ . Stąd

$$f(v) \in f(A \cap (z, +\infty)) \quad \text{i} \quad f(v) \in f(A \cap (-\infty, w)),$$

zatem wobec (7.3)

$$b = \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \inf f(A \cap (z, +\infty)) \leq f(v) \leq \sup f(A \cap (-\infty, w)) = \lim_{x \rightarrow w^-} f(x) = c.$$

Pokazaliśmy, że zbiory z rodziny  $\{\Delta_z : z \in Z\}$  są parami rozłączne, wystarczy teraz skorzystać z Własności 4.2.5 Suslina. ■

Przykładem funkcji monotonicznej o przeliczalnej ilości punktów nieciągłości jest cecha. To jest funkcja niemalejąca i zbiorem jej wszystkich punktów nieciągłości jest  $\mathbb{Z}$ .

Przypomnijmy Własność Darboux rzeczywistych funkcji ciągłych (Twierdzenie 5.7.1). Jeśli funkcja jest ciągła, to obrazem przedziału jest przedział. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, wystarczy rozważyć funkcję  $g$  z Przykładu 5.7.5. Jest ona nieciągła w 0, ale obrazem każdego przedziału jest przedział.

Poniższe twierdzenie to częściowe odwrócenie Własności Darboux rzeczywistych funkcji ciągłych (Twierdzenia 5.7.1).

#### **Twierdzenie 7.1.4 (O funkcji monotonicznej na przedziale)**

Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem, funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie rosnąca albo malejąca. Jeśli  $f(A)$  jest przedziałem, to  $f$  jest ciągła.

**Dowód:** Pokażemy tezę w przypadku funkcji rosnącej. Przypadek funkcji malejącej jest symetryczny.

Kontrapozycja: Załóżmy, że  $f$  nie jest ciągła w  $a \in A$ . Pokażemy, że  $f(A)$  nie jest przedziałem.

Wobec Wniosku 5.4.2 liczba  $a$  jest punktem skupienia przedziału  $A$ . Na mocy Wniosku 7.1.2 mamy

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

(przy czym jeśli  $a$  jest tylko jednostronnym punktem skupienia przedziału, to znaczy jest na jego brzegu, to istnieje tylko jedna z tych granic jednostronnych i mamy tylko jedną nierówność powyżej). A ponieważ  $f$  jest nieciągła, zatem jedna z nierówności powyżej musi być silna. Załóżmy, że

$$(7.4) \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < f(a)$$

(drugi przypadek jest symetryczny). Zwróćmy uwagę, że założyliśmy tu także, że ta granica lewostronna istnieje, czyli że  $a$  jest lewostronnym punktem skupienia zbioru  $A$ , to znaczy zbiór  $A \cap (-\infty, a)$  jest niepusty.

Zauważmy, że

$$(7.5) \quad b \in A \cap (-\infty, a) \implies f(b) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

Ta ostatnia nierówność wynika z (7.1).

Wobec (7.4) istnieje (np. na mocy Własności 1.4.6) taka liczba  $c \in \mathbb{R}$ , że

$$(7.6) \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < c < f(a).$$

Pokażemy najpierw nie wprost, że  $c \notin f(A)$ . Istotnie, gdyby  $c \in f(A)$ , to z definicji obrazu  $\exists t \in A : c = f(t)$ . Z Własności 2.3.3 wynika, że  $t < a$ , ale stąd i z (7.5)

$$c = f(t) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x),$$

a to jest sprzeczne z (7.6). Zatem  $c \notin f(A)$ .

Ponieważ  $A \cap (-\infty, a) \neq \emptyset$ , zatem  $\exists d \in A : d < a$ . Z (7.5) i (7.6) mamy

$$f(d) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) < c < f(a).$$

Ale ponieważ  $c \notin f(A)$ , to otrzymujemy  $[f(d), f(a)] \not\subset f(A)$ , czyli  $f(A)$  nie jest przedziałem (por. Charakterystykę przedziałów, czyli Własność 1.5.7). ■

**Wniosek 7.1.5** *Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem, funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła i albo rosnąca, albo malejąca. Wtedy  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  jest ciągła.*

**Dowód:** Niech  $f$  będzie rosnąca. Na mocy Własności 2.3.3 funkcja  $f^{-1}$  jest też rosnąca. Ponieważ  $A$  jest przedziałem i  $f$  jest ciągła, więc na mocy Własności Darboux rzeczywistych funkcji ciągłych (Twierdzenie 5.7.1) zbiór  $f(A)$  jest przedziałem. Ponadto jego obraz poprzez  $f^{-1}$ , czyli  $f^{-1}(f(A)) = A$  jest też przedziałem (z założenia). Zatem teza wynika z Twierdzenia 7.1.4 o funkcji monotonicznej na przedziale zastosowanego do  $f^{-1}$ . ■

Zauważmy, że stąd bardziej wprost wynika ciągłość funkcji arcus sinus, arcus tangens i logarytm.

Poniższe twierdzenie jest jakby odwróceniem Twierdzenia 7.1.4 o funkcji monotonicznej na przedziale.

**Twierdzenie 7.1.6 (O iniekcji ciągłej na przedziale)**

Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem, funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągłą iniekcją. Wtedy  $f$  jest albo rosnąca, albo malejąca.

W szczególności wtedy  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  jest też ciągła.

**Dowód:** Krok I. Załóżmy najpierw, że  $A = [\alpha, \beta]$ . Ponieważ  $f$  jest iniekcją, więc  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ .

Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że  $f(\alpha) < f(\beta)$  (drugi przypadek jest symetryczny). Pokażemy, że  $f$  jest rosnąca silnie.

Ustalmy najpierw dowolne  $x \in (\alpha, \beta)$ . Funkcja jest iniekcją, zatem  $f(x) \neq f(\alpha)$ . Chcemy pokazać, że  $f(x) > f(\alpha)$ . Pokażemy to nie wprost. Załóżmy zatem, że  $f(x) < f(\alpha)$ . Wtedy

$$\exists c \in \mathbb{R} : f(x) < c < f(\alpha) < f(\beta).$$

Stosujemy Twierdzenie 5.7.4 Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich do funkcji  $f|_{[\alpha, x]}$  i  $f|_{[x, \beta]}$ . Zatem

$$\exists t \in (\alpha, x) : c = f(t) \quad \text{oraz} \quad \exists s \in (x, \beta) : c = f(s).$$

Ponieważ przedziały  $(\alpha, x)$  i  $(x, \beta)$  są rozłączne, więc  $s \neq t$ , ale  $f(s) = c = f(t)$ , czyli mamy sprzeczność z iniektywnością.

Wiemy zatem, że  $f(x) > f(\alpha)$ . Symetrycznie pokazujemy, że  $f(x) < f(\beta)$ .

Ustalmy teraz dowolne  $y \in (x, \beta)$ . Chcemy pokazać, że  $f(x) < f(y)$ . Postępujemy znowu nie wprost, załóżmy, że  $f(x) > f(y)$ . Zatem

$$\exists d \in \mathbb{R} : f(y) < d < f(x) < f(\beta).$$

I teraz stosujemy Twierdzenie Darboux 5.7.4 o przyjmowaniu wartości pośrednich do funkcji  $f|_{[x, y]}$  i  $f|_{[y, \beta]}$ , znowu otrzymujemy analogiczną sprzeczność z iniektywnością.

Czyli pokazaliśmy, że  $\forall x, y \in [\alpha, \beta] : x < y \implies f(x) < f(y)$ , a to oznacza, że  $f$  jest silnie rosnąca.

Krok II. Niech teraz  $A$  będzie dowolnym przedziałem. Na mocy Lematu 3.8.9 istnieją ciągi: nierosnący  $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$  i niemalejący  $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ , że  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ . Zauważmy, że z Kroku I wynika w sposób indukcyjny, że

$$\text{albo } \forall n \in \mathbb{N}^* : f(\alpha_n) < f(\beta_n), \quad \text{albo } \forall n \in \mathbb{N}^* : f(\alpha_n) > f(\beta_n).$$

Dla ustalenia uwagi założymy, że zachodzi ta pierwsza sytuacja. Wtedy z rozumowania w Kroku I wynika, że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : f|_{[\alpha_n, \beta_n]}$  jest silnie rosnąca.

Ustalmy dowolne  $x, y \in A$  takie, że  $x < y$ . Wtedy

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : x \in [\alpha_n, \beta_n] \quad \text{i} \quad \exists m \in \mathbb{N}^* : y \in [\alpha_m, \beta_m],$$

a stąd  $x, y \in [\alpha_k, \beta_k]$ , gdzie  $k = \max(n, m)$ . Ponieważ  $f|_{[\alpha_k, \beta_k]}$  jest silnie rosnąca, więc  $f(x) < f(y)$ . Z dowolności  $x, y$  mamy monotoniczność  $f$ .

Teza dodatkowa wynika wprost z Wniosku 7.1.5. ■

Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu udowodniliśmy taką implikację:

*Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągłą injekcją,  
to funkcja odwrotna  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  jest też ciągła.*

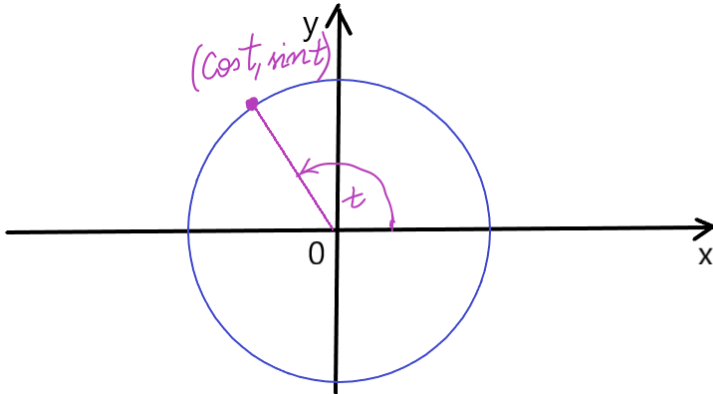
To jest ważne, że wartości funkcji  $f$  są w  $\mathbb{R}$ . Otóż nie można tego twierdzenia uogólnić na przypadek funkcji o wartościach zespolonych! Pokazuje to poniższy przykład.

**Przykład 7.1.7** Niech  $f : [0, 2\pi) \ni t \mapsto \cos t + i \sin t \in \mathbb{C}$ . Wtedy

$$f([0, 2\pi)) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = S^1$$

i  $f$  jest ciągłą injekcją. Możemy zatem rozważyć  $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ . Ale to odwzorowanie jest nieciągłe.

**Dowód:**



Mianowicie jeśli weźmiemy

$$w_n = \cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

to przy  $n \rightarrow \infty$

$$w_n \longrightarrow 1, \quad f^{-1}(w_n) = 2\pi - \frac{1}{n} \longrightarrow 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1).$$

■

## 7.2 Funkcje jednostajnie ciągłe

**Definicja 7.2.1 (Jednostajna ciągłość)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$  oraz  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ . Mówimy, że  $f$  jest *jednostajnie ciągła* na  $A$ , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z, w \in A : |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

**Wniosek 7.2.2** Funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła.

**Dowód:** Niech  $A \subset \mathbb{C}$  oraz  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ .

Teza wynika z zasad logiki (zmiana kolejności kwantyfikatorów), bo ze zdania

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in A \forall w \in A : |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

wynika zdanie

$$\forall z \in A \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall w \in A : |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon.$$

■

**Przykład 7.2.3** 1. Dowolna funkcja liniowa jest jednostajnie ciągła.

2.  $\mathbb{C} \ni x \longmapsto |x| \in \mathbb{C}$  jest funkcją jednostajnie ciągłą, więc i ciągłą.

3. Funkcja sinus jest jednostajnie ciągła.

4. Funkcja  $\mathbb{C} \ni z \longmapsto z^2 \in \mathbb{C}$  nie jest jednostajnie ciągła.

**Dowód:** 1. Niech  $a, b \in \mathbb{C}$  oraz  $f : \mathbb{C} \ni z \longmapsto az + b \in \mathbb{C}$ . Jeśli  $a = 0$ , to

$$\forall \varepsilon > 0 \forall z, w \in \mathbb{C} : |f(z) - f(w)| = 0 < \varepsilon.$$

Natomiast jeśli  $a \neq 0$ , to

$$\forall \varepsilon > 0 \forall z, w \in \mathbb{C} : |z - w| < \frac{\varepsilon}{|a|} \implies |f(z) - f(w)| = |a||z - w| < \varepsilon.$$

2. Ponieważ  $\forall z, w \in \mathbb{C} : ||z| - |w|| \leq |z - w|$  z Własności 1.6.1 modułu, więc jeśli ustalimy dowolne  $\varepsilon > 0$ , to  $\delta = \varepsilon$  jest dobra. Ciągłość wynika z Wniosku 7.2.2.

3. Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Wobec tożsamości trygonometrycznych i Własności 2.2.1 dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x - y| < \varepsilon \implies |\sin x - \sin y| = \left| 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| \cdot 1 < \varepsilon.$$

4. Ustalmy dowolne  $\delta > 0$ , wtedy

$$\left| \left( n + \frac{\delta}{2} \right)^2 - n^2 \right| = n\delta + \frac{\delta^2}{4} \longrightarrow +\infty (n \rightarrow \infty).$$

Z definicji granicy niewłaściwej dla każdego  $\delta$  istnieje takie  $n \in \mathbb{N}^*$ , że

$$\left| n + \frac{\delta}{2} - n \right| = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{oraz} \quad \left| \left( n + \frac{\delta}{2} \right)^2 - n^2 \right| > 1.$$

■

Ostatni podpunkt Przykładu 7.2.3 pokazuje, że implikacja przeciwna do tej we Wniosku 7.2.2 nie jest prawdziwa. Jednak w pewnych przypadkach implikacja daje się odwrócić.

**Twierdzenie 7.2.4 (Jednostajna ciągłość na zbiorze zwartym)** *Niech  $A \subset \mathbb{C}$  będzie zbiorem zwartym i  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ . Jeśli  $f$  jest ciągła, to  $f$  jest jednostajnie ciągła.*

**Dowód:** Kontrapozycja: Załóżmy, że  $f$  nie jest jednostajnie ciągła. Pokażemy, że nie jest ciągła.

$f$  nie jest jednostajnie ciągła, zatem

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n, y_n \in A : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Mamy  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$ . Ponieważ  $A$  jest zwarty, zatem istnieje podciąg  $(x_n)_{n \in \mathbb{L}}$  zbieżny do pewnego  $x \in A$ .

Teraz rozważmy  $(y_n)_{n \in \mathbb{L}} \subset A$ . Ze zwartości  $A$  istnieje podciąg  $(y_n)_{n \in \mathbb{M}}$  zbieżny do  $y \in A$ . Na mocy Twierdzenia 3.5.4 o podciągu ciągu zbieżnego  $(x_n)_{n \in \mathbb{M}}$  jest zbieżny do  $x$ .

Z ciągłości modułu (Przykład 7.2.3) wnioskujemy, że ciąg  $(|x_n - y_n|)_{n \in \mathbb{M}}$  jest zbieżny do  $|x - y|$ . Ale ponieważ  $|x_n - y_n| < 1/n$ , więc  $|x - y| \leq 0$  z Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej w granicy, czyli  $x = y$ .

W szczególności  $f(x) = f(y)$ . Ale przynajmniej jeden z ciągów  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  lub  $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  nie jest zbieżny do  $f(x) = f(y)$ . Bo gdyby oba były zbieżne do tej granicy, to mielibyśmy jeszcze raz z Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej

$$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Pokazaliśmy, że  $f$  nie jest ciągła. ■

**Twierdzenie 7.2.5** *Funkcja jednostajnie ciągła przeprowadza ciągi Cauchy'ego w ciągi Cauchy'ego.*

**Dowód:** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  będzie jednostajnie ciągła i  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$  będzie ciągiem Cauchy'ego. Trzeba pokazać, że  $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$  jest ciągiem Cauchy'ego.

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji jednostajnej ciągłości

$$\exists \delta > 0 \forall x, y \in A : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Z definicji ciągu Cauchy'ego

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N : |x_n - x_m| < \delta.$$

Z tych dwóch faktów wynika

$$\forall n, m \geq N : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

■

Funkcja ciągła nie ma tej własności. Rozważmy  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{C}$  i ciąg  $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ . Jest to ciąg Cauchy'ego, ale  $f(1/n) = n$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ , a  $(n)_{n=1}^{\infty}$  nie jest ciągiem Cauchy'ego.

**Twierdzenie 7.2.6 (O rozszerzaniu funkcji jednostajnie ciągłych)**

*Niech  $A \subset \mathbb{C}$ . Jeśli  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  jest jednostajnie ciągła, to istnieje dokładnie jedna taka funkcja  $\bar{f} : \bar{A} \rightarrow \mathbb{C}$  jednostajnie ciągła, że  $\forall x \in A : \bar{f}(x) = f(x)$ .*

**Dowód:** Niech  $x \in \bar{A}$ . Na mocy Ciągowego kryterium domknięcia (Własność 4.3.4) istnieje  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$  zbieżny do  $x$ . Wobec Własności 3.6.2 jest to ciąg Cauchy'ego. Zatem ciąg  $(f(x_n))_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  jest Cauchy'ego na mocy Twierdzenia 7.2.5. Na mocy Twierdzenia 3.6.5 o zespolonych ciągach Cauchy'ego jest on zbieżny. Oznaczmy jego granicę symbolem  $\bar{f}(x)$ .

Trzeba teraz pokazać:

1. jednoznaczność (że dla dowolnego  $x \in \bar{A}$  istnieje dokładnie jedno  $\bar{f}(x)$ );
2. jednostajną ciągłość  $\bar{f}$ ;
3.  $\bar{f}|_A \equiv f$ .

Ad 1. Ustalmy dowolny  $x \in \bar{A}$ . Niech  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$  i  $(z_n)_{n=1}^\infty \subset A$  będą zbieżne do  $x$ . Z nierówności trójkąta dla modułu

$$0 \leq |z_n - x_n| = |z_n - x - (x_n - x)| \leq |z_n - x| + |x_n - x|,$$

a stąd na mocy Twierdzenia 3.3.4 o trzech ciągach  $|z_n - x_n| \rightarrow 0$ .

Chcemy pokazać, że ciągi  $(f(x_n))_{n=1}^\infty, (f(z_n))_{n=1}^\infty$  mają tę samą granicę (będzie nią  $\bar{f}(x)$ ). Wystarczy pokazać, że  $|f(z_n) - f(x_n)| \rightarrow 0$ .

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Funkcja  $f$  jest jednostajnie ciągła, zatem

$$\exists \delta > 0 \forall a, b \in A : |a - b| < \delta \implies |f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Z definicji granicy ciągu, ponieważ  $|z_n - x_n| \rightarrow 0$ , więc

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |z_n - x_n| < \delta.$$

Ale z tych dwóch faktów wynika, że

$$\forall n \geq N : |f(z_n) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

Ad 2. Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Ponieważ  $f$  jest jednostajnie ciągła, zatem

$$(7.7) \quad \exists \eta > 0 \forall a, b \in A : |a - b| < \eta \implies |f(a) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech  $\delta := \eta/3$  i niech  $x, y \in \bar{A}$  będą takie, że  $|x - y| < \delta$ . Chcemy pokazać, że zachodzi  $|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| < \varepsilon$ .

Z Ciągowego kryterium domknięcia (Własność 4.3.4) istnieją takie  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$  i  $(y_n)_{n=1}^\infty \subset A$ , że  $x_n \rightarrow x$  i  $y_n \rightarrow y$ . Z definicji granicy ciągu

$$\begin{aligned} \exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_1 : & |x_n - x| < \delta; \\ \exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N_2 : & |y_n - y| < \delta. \end{aligned}$$

Zatem jeśli  $N = N_1 + N_2$ , to

$$\forall n \geq N : |x_n - x| + |y_n - y| < 2\delta,$$

a ponieważ  $|x - y| < \delta$ , to wobec nierówności trójkąta dla modułu

$$\forall n \geq N : |x_n - y_n| = |x_n - x + x - y - (y_n - y)| < 3\delta = \eta.$$

A stąd i z (7.7)

$$\forall n \geq N : |f(x_n) - f(y_n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Z ciągłości modułu (Przykład 7.2.3) i Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej w granicy mamy

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Ad 3. Równość  $\bar{f}|_A \equiv f$  wynika z definicji Heinego ciągłości i definicji  $\bar{f}$ , bo wobec Wniosku 7.2.2 funkcja  $f$  jest ciągła. ■

Funkcja ciągła nie ma tej własności. Na przykład jeśli  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ , to dla  $f$  nie da się dobrać takiej wartości w 0, żeby przedłużyć tę funkcję do funkcji ciągłej na  $\mathbb{R}$ .

### 7.3 Funkcje lipschitzowskie (i hölderowskie)

**Definicja 7.3.1 (Warunek Lipschitza)** <sup>27</sup> Niech  $A \subset \mathbb{C}$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Mówimy, że  $f$  jest *lipschitzowska* lub że spełnia *warunek Lipschitza*, jeśli

$$\exists L > 0 \forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

**Przykład 7.3.2** Każda funkcja liniowa jest lipschitzowska. Moduł jest funkcją lipschitzowską. Niech  $a > 0$ . Wtedy  $[a, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$  jest lipschitzowska.

**Dowód:** Funkcja stała jest lipschitzowska z dowolną stałą  $L$ . Każda niestała funkcja liniowa jest nawet *podobieństwem*, bo jeśli  $f(z) = az + b$ , to  $|f(x) - f(y)| = |a||x - y|$ .

Moduł jest funkcją lipschitzowską, bo  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

Funkcja  $[a, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$  jest lipschitzowska, bo wobec (1.5)

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}|x - y|, \quad x, y \geq a.$$

■

**Własność 7.3.3** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem oraz niech  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła. Jeśli  $f$  jest różniczkowalna w  $\text{Int}(A)$  i jej pochodna jest ograniczona, to  $f$  jest lipschitzowska.

**Dowód:** Z założenia wynika, że  $\exists M \in \mathbb{R} \forall c \in \text{Int}(A) : |f'(c)| \leq M$ . Ustalmy dowolne  $a, b \in A$  takie, że  $a < b$ . Wtedy  $[a, b] \subset A$  na mocy Charakteryzacji przedziałów (Własność 1.5.7). Stosujemy Twierdzenie 6.2.6 Lagrange’a do  $f|_{[a,b]}$  otrzymując

$$|f(a) - f(b)| \leq M|a - b|.$$

■

---

<sup>27</sup>Rudolf Lipschitz (1832-1903), matematyk niemiecki

**Twierdzenie 7.3.4** *Funkcja lipschitzowska jest jednostajnie ciągła.*

**Dowód:** Niech  $A \subset \mathbb{C}$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  spełnia warunek Lipschitza ze stałą  $L > 0$ . Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$  i połóżmy  $\delta = \varepsilon/L$ . Niech  $a, b \in A$ . Jeśli  $|a - b| < \delta$ , to z warunku Lipschitza i wyboru  $\delta$

$$|f(a) - f(b)| \leq L|a - b| < L\delta = \varepsilon.$$

■

Implikacja przeciwna nie jest prawdziwa: np. funkcja  $[0, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$  jest jednostajnie ciągła, ale nie jest lipschitzowska (ćwiczenie).

**Definicja 7.3.5 (Warunek Höldera)** <sup>28</sup> Niech  $A \subset \mathbb{C}$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Mówimy, że  $f$  jest *hölderowska* lub że spełnia *warunek Höldera*, jeśli

$$\exists H > 0 \exists \alpha > 0 \forall x, y \in A : \quad |f(x) - f(y)| \leq H|x - y|^\alpha.$$

Warunek Höldera jest istotnym uogólnieniem warunku Lipschitza.

**Przykład 7.3.6** *Funkcja  $[0, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}$  jest hölderowska z wykładnikiem  $1/2$ , ale nie jest lipschitzowska.*

**Dowód:** ćwiczenie. ■

**Twierdzenie 7.3.7** *Funkcja hölderowska jest jednostajnie ciągła.*

**Dowód:** ćwiczenie. ■

## 7.4 Funkcje ograniczone

Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Przypomnijmy, że  $f$  jest *ograniczona*, jeśli zbiór wartości  $f(A)$  jest ograniczony. Zauważmy, że jest to równoważne z warunkiem

$$\exists M > 0 \forall x \in A : \quad |f(x)| < M.$$

### Definicja 7.4.1 (Oscylacja)

Niech  $A, \Delta \subset \mathbb{R}$  będą przedziałami,  $\Delta \subset A$  i funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ograniczona. *Oscylacją*  $f$  na przedziale  $\Delta$  nazywamy

$$\operatorname{osc}_\Delta f := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \Delta\}.$$

---

<sup>28</sup>Otto Ludwig Hölder (1859-1937), matematyk niemiecki

Na przykład  $\text{osc}_{[0,\pi)} \sin = 1$ ,  $\text{osc}_{\mathbb{R}} \sin = 2$ .

**Własność 7.4.2** Niech  $A, \Delta \subset \mathbb{R}$  będą przedziałami,  $\Delta \subset A$  i funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ograniczona. Wtedy  $\text{osc}_{\Delta} f \in [0, +\infty)$ .

Ponadto  $f|_{\Delta}$  jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy  $\text{osc}_{\Delta} f = 0$ .

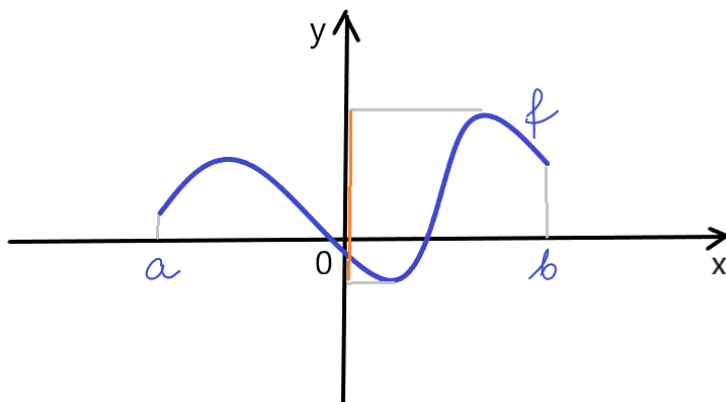
**Dowód:** Funkcja  $f$  jest ograniczona, to znaczy  $\exists M > 0 \forall x \in \Delta : |f(x)| < M$ . A stąd i z nierówności trójkąta dla modułu

$$\forall x, y \in \Delta : |f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2M.$$

To oznacza, że zbiór w definicji oscylacji jest ograniczony od góry, zatem ma supremum skończone (na mocy Aksjomatu Dedekinda, to znaczy Twierdzenia 1.4.9).

Funkcja  $f|_{\Delta}$  nie jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy  $\exists a, b \in \Delta : f(a) \neq f(b)$ , ale stąd  $\text{osc}_{\Delta} f \geq |f(a) - f(b)| > 0$ . Jeśli  $f|_{\Delta}$  jest stała, to zbiór w definicji oscylacji jest jednoelementowy i tym jedynym elementem jest 0. ■

W poniższej własności pokażemy, że oscylacja funkcji na rysunku na odcinku  $[a, b]$  jest długością tego pomarańczowego pionowego odcinka.



**Własność 7.4.3 (Wzór na oscylację)** Niech  $A, \Delta \subset \mathbb{R}$  będą przedziałami,  $\Delta \subset A$  i funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ograniczona. Wtedy

$$\text{osc}_{\Delta} f := \sup\{f(x) : x \in \Delta\} - \inf\{f(x) : x \in \Delta\}.$$

**Dowód:** Niech  $a = \sup\{f(x) : x \in \Delta\}$  i  $b := \inf\{f(x) : x \in \Delta\}$ . Zauważmy, że  $a \geq b$  z własności kresów.

Z definicji oscylacji i własności modułu dla dowolnych  $u, v \in \Delta$  zachodzi

$$f(u) - f(v) \leq \text{osc}_{\Delta} f.$$

Ustalmy teraz dowolne  $v \in \Delta$ . Mamy

$$\forall u \in \Delta : \quad f(u) \leq f(v) + \operatorname{osc}_{\Delta} f,$$

zatem wprost z definicji  $a = \sup\{f(u) : u \in \Delta\} \leq f(v) + \operatorname{osc}_{\Delta} f$ . Ale stąd i z dowolności  $v$  mamy

$$\forall v \in \Delta : \quad f(v) \geq a - \operatorname{osc}_{\Delta} f,$$

zatem  $b = \inf\{f(v) : v \in \Delta\} \geq a - \operatorname{osc}_{\Delta} f$ . Pokazaliśmy zatem, że

$$\operatorname{osc}_{\Delta} f \geq a - b.$$

Z definicji kresów

$$\forall t, s \in \Delta : \quad b \leq f(t) \leq a \quad \text{oraz} \quad -a \leq -f(s) \leq -b.$$

Jeśli dodamy stronami te nierówności otrzymamy z własności modułu

$$\forall t, s \in \Delta : \quad |f(t) - f(s)| \leq a - b$$

i wystarczy wziąć supremum po lewej stronie, aby uzyskać  $\operatorname{osc}_{\Delta} f \leq a - b$ . ■

**Przykład 7.4.4** Jeśli  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

to  $f$  jest funkcją ograniczoną i dla każdego przedziału  $\Delta$ , do którego należy 0, mamy  $\operatorname{osc}_{\Delta} f = 2$ .

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Dla przedziału  $\Delta$  oznaczmy symbolem  $|\Delta|$  jego długość.

**Twierdzenie 7.4.5 (Oscylacja funkcji ciągłej)**

Niech  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  i funkcja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła. Wtedy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \Delta \subset [a, b] : \quad \Delta \text{ jest przedziałem i } |\Delta| < \delta \implies \operatorname{osc}_{\Delta} f < \varepsilon.$$

**Dowód:** Ponieważ  $[a, b]$  jest zwarty (na mocy Twierdzenia 4.4.3, bo jest domknięty i ograniczony w  $\mathbb{R}$ ), zatem  $f$  jest jednostajnie ciągła na mocy Twierdzenia 7.2.4 o jednostajnej ciągłości na zbiorze zwartym. Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji jednostajnej ciągłości

$$\exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : \quad |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech teraz  $\Delta \subset [a, b]$  będzie przedziałem i  $|\Delta| < \delta$ . Zatem  $\forall t, s \in \Delta : |t - s| \leq |\Delta| < \delta$ , a stąd  $|f(t) - f(s)| < \varepsilon/2$ . Z definicji supremum

$$\operatorname{osc}_{\Delta} f \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

## 7.5 Funkcje wypukłe

W tym rozdziale rozważamy funkcje wypukłe. Analogiczne twierdzenia i wnioski są prawdziwe dla funkcji wklęsłych, co można wywnioskować z tych wyników podanych tutaj, wykorzystując definicję funkcji wklęsłej.

**Twierdzenie 7.5.1 (Iloraz różnicowy funkcji wypukłej)** *Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , to następujące warunki są równoważne:*

( $\iota$ )  $f$  jest wypukła;

( $\iota$ )  $\forall a \in A : \mathcal{I}_{f,a}$  jest funkcją niemalejącą;

$$(\iota\iota) \quad \forall a, b, c \in A : \quad a < b < c \implies \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

**Dowód:** ( $\iota$ )  $\implies$  ( $\iota\iota$ )

Ustalmy dowolne  $a \in A$ . Dziedzina  $\mathcal{I}_{f,a}$  jest  $A \setminus \{a\}$ .

I. Pokażemy najpierw, że  $\mathcal{I}_{f,a}$  jest niemalejący w  $A \cap (-\infty, a)$ . Ustalmy dowolne  $x, y \in A$  takie, że  $x < y < a$ .

Niech  $t := (a - y)/(a - x)$ . Wtedy  $t \in (0, 1)$ ,

$$1 - t = 1 - \frac{a - y}{a - x} = \frac{a - x - a + y}{a - x} = \frac{y - x}{a - x}$$

oraz

$$tx + (1 - t)a = \frac{a - y}{a - x}x + \frac{y - x}{a - x}a = \frac{ax - xy + ay - xa}{a - x} = y.$$

Z ( $\iota$ ) (to znaczy z definicji wypukłości  $f$ )

$$f(y) = f(tx + (1 - t)a) \leq tf(x) + (1 - t)f(a),$$

czyli

$$f(y) - f(a) \leq tf(x) + (1 - t)f(a) - f(a) = t(f(x) - f(a)) = \frac{a - y}{a - x}(f(x) - f(a))$$

i wystarczy wydzielić przez  $y - a$ , by otrzymać

$$\mathcal{I}_{f,a}(y) \geq \mathcal{I}_{f,a}(x).$$

II. Drugi przypadek jest symetryczny: pokazujemy, że  $\mathcal{I}_{f,a}$  jest niemalejący w  $A \cap (a, +\infty)$ . Czyli ustalamy dowolne  $x, y \in A$  takie, że  $a < x < y$ . Należy teraz wziąć  $t = (y - x)/(y - a)$  i pokazać, że  $x = ta + (1 - t)y$ , a potem postępujemy symetrycznie.

III. Z punktów I i II wynika, że  $\forall b \in A$  : funkcja  $\mathcal{I}_{f,b}$  jest niemalejąca zarówno w przedziale  $A \cap (b, +\infty)$ , jak i w  $A \cap (-\infty, b)$ .

Ustalmy teraz dowolne  $x, y \in A$  takie, że  $x < a < y$ . Wiemy już, że

$$\mathcal{I}_{f,x}(a) \leq \mathcal{I}_{f,x}(y) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{I}_{f,y}(x) \leq \mathcal{I}_{f,y}(a).$$

Stąd wynika, że

$$\mathcal{I}_{f,a}(x) = \mathcal{I}_{f,x}(a) \leq \mathcal{I}_{f,x}(y) = \mathcal{I}_{f,y}(x) \leq \mathcal{I}_{f,y}(a) = \mathcal{I}_{f,a}(y).$$

$(\iota) \implies (\iota\iota)$  Ustalmy dowolne  $a, b, c \in A$  takie, że  $a < b < c$ . Wtedy z  $(\iota)$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \mathcal{I}_{f,b}(a) \leq \mathcal{I}_{f,b}(c) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

$(\iota\iota) \implies (\iota)$  Ustalmy dowolne  $x, y \in A$  i  $t \in [0, 1]$ . Chcemy pokazać, że

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że  $x < y$  oraz  $t \in (0, 1)$ . Wtedy  $x < tx + (1 - t)y < y$  z Lematu 1.5.2. Z  $(\iota\iota)$

$$\frac{f(x) - f(tx + (1 - t)y)}{x - tx - (1 - t)y} \leq \frac{f(tx + (1 - t)y) - f(y)}{tx + (1 - t)y - y}.$$

Przekształcamy równoważnie

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(tx + (1 - t)y)}{(1 - t)(x - y)} &\leq \frac{f(tx + (1 - t)y) - f(y)}{t(x - y)} \\ tf(x) - tf(tx + (1 - t)y) &\geq (1 - t)f(tx + (1 - t)y) - (1 - t)f(y) \\ f(tx + (1 - t)y) &\leq tf(x) + (1 - t)f(y). \end{aligned}$$

■

**Definicja 7.5.2 (Pochodne jednostronne)** Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem,  $a \in A$  i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeśli istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \mathcal{I}_{f,a}(x) \quad \left( \text{odp. } \lim_{x \rightarrow a^-} \mathcal{I}_{f,a}(x) \right)$$

to nazywamy ją pochodną **prawostronną** (odpowiednio **lewostronną**) funkcji  $f$  w punkcie  $a$  i oznaczamy symbolem  $f'_+(a)$  (odpowiednio  $f'_-(a)$ ).

Na przykład pochodną lewostronną funkcji  $|\cdot|$  w 0 jest  $-1$ , a pochodną prawostronną 1.

**Wniosek 7.5.3** *Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem otwartym,  $a \in A$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła, to istnieją pochodne jednostronne w punkcie  $a$ .*

**Dowód:** Wobec Twierdzenia 7.5.1 o ilorazie różnicowym funkcji wypukłej  $\mathcal{I}_{f,a}$  jest funkcją niemalejącą. Wystarczy teraz skorzystać z Twierdzenia 7.1.1 o granicach jednostronnych funkcji monotonicznej. ■

**Wniosek 7.5.4** *Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem otwartym i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła, to  $f$  jest różniczkowalna poza zbiorem co najwyżej przeliczalnym.*

**Dowód:** Wobec Wniosku 7.5.3 istnieją pochodne jednostronne. Co więcej wobec monotoniczności ilorazu różnicowego (Twierdzenie 7.5.1) mamy

$$f'_-(a) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{I}_{f,a}(a-h) \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \mathcal{I}_{f,a}(a+h) = f'_+(a)$$

dla dowolnego  $a \in A$  (por. Twierdzenie 5.1.9).

Z monotoniczności ilorazu różnicowego wynika (por. dowód Twierdzenia 7.1.3), że

$$a < t < b \implies f'_+(a) \leq \mathcal{I}_{f,a}(t) = \mathcal{I}_{f,t}(a) \leq \mathcal{I}_{f,t}(b) = \mathcal{I}_{f,b}(t) \leq f'_-(b).$$

Jeśli obie pochodne jednostronne w  $a \in A$  są równe, to istnieje pochodna  $f'(a)$  z Twierdzenia 5.3.5 o zależności między granicą i granicami jednostronnymi.

Niech teraz  $Z := \{z \in A : f \text{ nie jest różniczkowalna w } z\}$ . Wobec powyższego  $f'_-(z) < f'_+(z)$  dla  $z \in Z$  i jeśli zdefiniujemy  $\Delta_z = (f'_-(z), f'_+(z))$ , to będzie to przedział otwarty. Co więcej, jeśli  $a, b \in Z$  i  $a < b$ , to  $\Delta_a \cap \Delta_b = \emptyset$ . Z Własności 4.2.5 Suslina zbiór  $Z$  jest co najwyżej przeliczalny. ■

**Wniosek 7.5.5 (Ciągłość funkcji wypukłej na przedziale otwartym)** *Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem otwartym,  $a \in A$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest wypukła, to*

$$\exists \delta > 0 \exists M > 0 \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < M|x - a|.$$

*W szczególności  $f$  jest ciągła w  $a$ .*

**Dowód:** Wobec Wniosku 7.5.3 istnieją pochodne jednostronne. Z definicji Cauchy'ego granic jednostronnych

$$\exists \delta_1 > 0 \forall x \in A : 0 < x - a < \delta_1 \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'_+(a) \right| < 1$$

zatem z własności modułu dla takich  $x$

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < |f'_+(a)| + 1.$$

Symetrycznie pokazujemy, że

$$\exists \delta_2 > 0 \forall x \in A : \quad 0 < a - x < \delta_2 \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < |f'_-(a)| + 1.$$

Niech  $M := \max(|f'_+(a)| + 1, |f'_-(a)| + 1)$  i  $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ .

Ustalmy teraz dowolne  $\varepsilon > 0$ . Jeśli  $x \in A$  i  $|x - a| < \min(\delta, \varepsilon/M)$ , to

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

■

Przykład 5.6.2 pokazuje, że założenie o otwartości przedziału jest konieczne.

### **Twierdzenie 7.5.6 (Wypukłość funkcji różniczkowalnej)**

*Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem otwartym i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna, to  $f$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy  $f'$  jest niemalejąca.*

**Dowód:** ( $\implies$ ) Ustalmy dowolne  $a, b \in A$  takie, że  $a < b$ , i dowolne  $z \in (a, b)$ . Wtedy wobec Twierdzenia 7.5.1 o ilorazie różnicowym funkcji wypukłej, Twierdzenia 5.3.5 o związku granicy i granic jednostronnych oraz Twierdzenia 5.1.9 o zachowaniu nierówności dla funkcji

$$\begin{aligned} f'(a) = f'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a^+} \mathcal{I}_{f,a}(x) \leq \\ &\leq \mathcal{I}_{f,a}(z) = \mathcal{I}_{f,z}(a) \leq \mathcal{I}_{f,z}(b) = \mathcal{I}_{f,b}(z) \leq \lim_{x \rightarrow b^-} \mathcal{I}_{f,b}(x) = f'_-(b) = f'(b). \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) Przez kontrapozycję: Załóżmy, że  $f$  nie jest wypukła. Zatem na mocy Twierdzenia 7.5.1 o ilorazie różnicowym funkcji wypukłej (stosujemy punkt  $(uu)$ )

$$\exists a, b, c \in A : \quad a < b < c \quad \text{oraz} \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} > \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Na mocy Twierdzenia 6.2.6 Lagrange'a o wartości średniej

$$\exists \eta \in (a, b) \exists \xi \in (b, c) : \quad f'(\eta) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \quad \text{oraz} \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Mamy  $\eta < \xi$  (bo  $\eta < b < \xi$ ) oraz  $f'(\eta) > f'(\xi)$ , zatem  $f'$  nie jest niemalejąca. ■

### **Wniosek 7.5.7 (Wypukłość funkcji dwukrotnie różniczkowalnej)**

*Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem otwartym i  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  jest dwukrotnie różniczkowalna, to  $f$  jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy  $f''$  jest nieujemna.*

**Dowód:** Bezpośredni wniosek z Twierdzenia 7.5.6 oraz Własności 6.3.1 i 6.3.2 mówiących o zależności między monotonicznością a znakiem pochodnej. ■

**Wniosek 7.5.8 (Nierówność między średnimi arytmetyczną i geometryczną)**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall a_1, \dots, a_n > 0 : \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

**Dowód:** Ponieważ dla  $x > 0$

$$(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

zatem  $\ln$  jest funkcją wklęsłą na mocy Wniosku 7.5.7 i rosnącą na mocy Własności 6.3.2. W szczególności funkcja  $-\ln$  jest wypukła i na mocy Nierówności Jensena (Twierdzenie 2.4.4)

$$\begin{aligned} -\ln \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &\leq \frac{1}{n} (-\ln a_1 - \ln a_2 - \dots - \ln a_n) = \\ &= -\frac{1}{n} \ln(a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = -\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}. \end{aligned}$$

Z monotoniczności logarytmu wynika teza. ■

**7.6 Reguła de L'Hôpitala i badanie przebiegu zmienności**

29

**Twierdzenie 7.6.1 (Reguła de L'Hôpitala)**

Niech  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $a < b$ , funkcje  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  będą różniczkowalne i niech  $c \in \{a, b\}$ . Zakładamy, że  $\forall x \in (a, b) : g(x) \neq 0$  i  $g'(x) \neq 0$ ; że istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)  $d := \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$ ; wreszcie, że zachodzi jeden z poniższych warunków:

$$(\iota) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x); \quad \text{albo} \quad (\upsilon) \lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = +\infty.$$

$$\text{Wtedy } \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

**Dowód:** (Według Ważewskiego<sup>30</sup>) Zauważmy, że na mocy Twierdzenia 6.2.8 Cauchy'ego o wartości średniej dla dowolnych różnych punktów  $x, y \in (a, b)$  istnieje punkt  $\xi = \xi(x, y)$  leżący pomiędzy nimi i taki, że

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}.$$

<sup>29</sup>Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704) – matematyk francuski

<sup>30</sup>Tadeusz Ważewski (1896-1972) – matematyk polski

Przekształcając to równanie otrzymamy

(7.8)

$$\forall x, y \in (a, b), x \neq y \exists \xi = \xi(x, y) \text{ pomiędzy } x \text{ i } y : \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(y)}{g(y)}.$$

Będziemy korzystać z definicji Heinego granicy. Ustalmy zatem dowolny ciąg  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset (a, b)$  dążący do  $c$ . Chcemy pokazać, że

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow d.$$

Ad  $(\iota)$ . Znajdujemy ciąg  $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset (a, b)$  taki, że

$$(*) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : y_n \neq x_n;$$

$$(**) \quad y_n \longrightarrow c;$$

$$(***) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : \max(|f(y_n)|, |g(y_n)|) \leq 2^{-n}|g(x_n)|.$$

Te ostatni warunek jest możliwy wobec założenia o granicach funkcji  $f$  i  $g$  w  $c$ .

Jak to robimy? Pokażemy to w przypadku  $c = b$  (przypadek  $c = a$  jest symetryczny). Ustalmy dowolne  $n$ . Wobec założenia  $(\iota)$ , Własności 1.5.5, ciągłości modułu (Przykład 7.2.3) i Twierdzeń 5.5.1 o działaniach na funkcjach ciągłych i 5.5.3 o złożeniu funkcji ciągłych mamy

$$\lim_{t \rightarrow c} \max(|f(t)|, |g(t)|) = \lim_{t \rightarrow c} \frac{|f(t)| + |g(t)| + ||f(t)| - |g(t)||}{2} = 0,$$

zatem istnieje takie  $y_n \in (x_n, c)$ , że  $\max(|f(y_n)|, |g(y_n)|) \leq 2^{-n}|g(x_n)|$ . Ponieważ  $\forall n \in \mathbb{N}^* : x_n < y_n < c$ , więc z uogólnienia Twierdzenia o trzech ciągach (Wniosek 3.7.7) wnioskujemy, że  $y_n \longrightarrow c$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Zauważmy, że z warunku  $(***)$  wynika, że

$$(7.9) \quad \frac{f(y_n)}{g(x_n)} \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{g(y_n)}{g(x_n)} \longrightarrow 0.$$

Niech teraz  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \xi_n = \xi(x_n, y_n)$  będzie liczbą dobraną z warunku (7.8). Z uogólnienia Twierdzenia o trzech ciągach (Wniosek 3.7.7) wynika, że  $\xi_n \longrightarrow c$ . Zatem z (7.8), definicji Heinego granicy oraz (7.9) wynika, że

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \longrightarrow d \quad (n \rightarrow \infty),$$

co kończy dowód w przypadku  $(\iota)$ .

Ad  $(\iota)$ . Ustalmy dowolny podciąg  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  ciągu  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Będziemy korzystać z Twierdzenia 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach (lub jego odpowiednika Własności 3.7.4 w przypadku granicy niewłaściwej).

Ustalmy dowolny ciąg  $(y_j)_{j=1}^\infty \subset (a, b)$  dążący do  $c$ . Wybieramy teraz podciąg  $(z_j)_{j=1}^\infty = (x_{n_{k_j}})_{j=1}^\infty$  ciągu  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  tak, aby

$$(*) \quad \forall j \in \mathbb{N}^* : y_j \neq z_j;$$

$$(**) \quad \forall j \in \mathbb{N}^* : |g(z_j)| \geq 2^j \max(|f(y_j)|, |g(y_j)|).$$

To ostatnie jest możliwe wobec założenia o granicy funkcji  $|g|$  w  $c$  – podobnie jak w przypadku  $(\iota)$ . Zauważmy, że z tego warunku wynika

$$(7.10) \quad \frac{f(y_j)}{g(z_j)} \longrightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{g(y_j)}{g(z_j)} \longrightarrow 0.$$

Niech teraz  $\forall j \in \mathbb{N}^* : \xi_j = \xi(z_j, y_j)$  będzie dobrana z warunku (7.8). Z uogólnienia Twierdzenia o trzech ciągach (Wniosek 3.7.7) wynika, że  $\xi_j \longrightarrow c$ . Zatem z (7.8), definicji Heinego granicy oraz (7.10) wnioskujemy, że

$$\frac{f(z_j)}{g(z_j)} \longrightarrow d \quad (j \rightarrow \infty).$$

Wystarczy teraz zastosować odpowiednio Twierdzenie 3.5.5 Cauchy'ego o podciągach lub jego odpowiednik Własność 3.7.4. ■

**Wniosek 7.6.2** Niech  $a \in \mathbb{R}$  i niech  $f, g$  będą określone i różniczkowalne w pewnym sąsiedztwie  $V$  punktu  $a$ . Zakładamy, że  $\forall x \in V : g(x) \neq 0$  i  $g'(x) \neq 0$ ; że istnieje granica (właściwa lub niewłaściwa)  $d := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$ ; wreszcie, że zachodzi jeden z poniższych warunków:

$$(\iota) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad \text{albo} \quad (\iota) \quad \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty.$$

$$\text{Wtedy} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = d.$$

**Dowód:** Niech  $r > 0$  będzie takie, że  $(a-r, a) \cup (a, a+r) \subset V$ . Stosujemy poprzednie twierdzenie do  $f|_{(a-r, a)}$  i  $g|_{(a-r, a)}$  otrzymując z lokalności granicy  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = d$ .

Następnie stosujemy do  $f|_{(a, a+r)}$  i  $g|_{(a, a+r)}$  otrzymując  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = d$ . Wystarczy teraz zastosować Twierdzenie 5.3.5 o związku granicy z granicami jednostronnymi (lub jego odpowiednik dla granicy niewłaściwej). ■

Najpierw podamy przykłady użycia reguły.

### Przykład 7.6.3

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\operatorname{arctg} x} = 2;$
- $\forall \alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = 0;$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{2};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$

**Dowód (szkic):** Mamy

$$\begin{aligned} \frac{(\ln(x+1) - \ln(x-1))'}{(\operatorname{arctg} x)'} &= \frac{1/(x+1) - 1/(x-1)}{-1/(x^2+1)} = 2 \frac{x^2+1}{x^2-1}; \\ \frac{(\ln x)'}{(x^{-\alpha})'} &= \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} x^\alpha; \\ \frac{(x-1-\ln x)''}{((x-1)\ln x)''} &= \frac{1/x^2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}; \\ x^x &= e^{x \ln x}. \end{aligned}$$

■

A teraz przykłady, gdzie reguła nie działa.

**Przykład 7.6.4** •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = 0$ , ale  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 \sin(1/x))'}{(x)'} \text{ nie istnieje};$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x^2 + x^2}{\sin x^2 - x^2} = -1$ , ale  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\cos x^2 + x^2)'}{(\sin x^2 - x^2)'} \text{ nie istnieje};$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-2}}{e^{x-4}} = 0$ , ale próba zastosowania reguły tylko sprawę komplikuje.

**Dowód:** ćwiczenie.

■

**Lemat 7.6.5** *Jeśli  $W$  jest wielomianem, to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x)e^{-x} = 0.$$

**Dowód:** Indukcja względem stopnia wielomianu.

I. Jeśli  $W$  jest funkcją stałą, to oczywiście teza spełniona.

II. Załóżmy teraz, że teza zachodzi dla wielomianów stopnia  $k$  dla pewnego ustalonego  $k \in \mathbb{N}$ . Niech  $W$  będzie wielomianem stopnia  $k+1$ . Wtedy  $W'$  jest wielomianem stopnia  $k$  i z założenia indukcyjnego

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} W'(x)e^{-x} = 0.$$

Wystarczy teraz zastosować regułę de L'Hôpitala (Twierdzenie 7.6.1) do wielomianu  $W$  i funkcji  $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$  i to kończy dowód indukcyjny. ■

**Przykład 7.6.6** Funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  jest klasy  $C^\infty$  i  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  jest  $k$ -płaska w 0 (jest nieskończenie płaska w 0).

**Dowód:** ćwiczenie. ■

Badanie przebiegu zmienności funkcji

SCHEMAT:

I. Dziedzina, miejsca zerowe, punkt przecięcia z osią  $Oy$ , parzystość, nieparzystość, okresowość, granice na krańcach dziedziny, asymptoty.

II. Pochodna: dziedzina, miejsca zerowe, znak.

III. Druga pochodna: dziedzina, miejsca zerowe, znak.

IV. Tabelka, wykres, przeciwdziedzina.

## 8 Ciągi funkcyjne

### 8.1 Zbieżność punktowa i jednostajna

**Definicja 8.1.1 (Zbieżność punktowa)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$  oraz  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ . Mówimy, że *ciąg funkcyjny*  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest zbieżny *punktowo* do  $f$ , jeśli

$$\forall x \in A : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Piszemy  $f_n \longrightarrow f$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Przykład 8.1.2** Niech  $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n : \mathbb{C} \ni z \longmapsto \frac{z}{n} \in \mathbb{C}$ . Wtedy  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest zbieżny punktowo do funkcji stale równej 0.

**Dowód:** Ustalmy  $z \in \mathbb{C}$ . Wobec Przykładu 3.1.2 i Twierdzenia 3.2.7 o działaniu na granicach ciągów

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z \cdot \frac{1}{n} = 0.$$

■

W powyższym przykładzie zarówno wszystkie funkcje w ciągu, jak i funkcja graniczna są ciągłe. Jednak ciąg funkcji ciągłych może być zbieżny punktowo do funkcji nieciągłej.

**Przykład 8.1.3** Niech  $f_n : [0, 1] \ni x \longmapsto x^n \in \mathbb{R}$ . Wtedy  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest zbieżny punktowo do funkcji  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

**Dowód:** Przykład 3.9.1.

■

**Definicja 8.1.4 (Zbieżność jednostajna i lokalnie jednostajna)** Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n : A \longrightarrow \mathbb{C}$  oraz  $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ . Mówimy, że ciąg funkcyjny  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest zbieżny *jednostajnie* do  $f$ , jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N \forall x \in A : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Piszemy  $f_n \Rightarrow f$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Mówimy, że ciąg funkcyjny  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest zbieżny *lokalnie jednostajnie* do  $f$ , jeśli

$$\forall x \in A \exists U - \text{otoczenie } x \text{ w } A : \quad f_n|_U \Rightarrow f|_U.$$

**Własność 8.1.5** *Jednostajna zbieżność implikuje lokalnie jednostajną zbieżność do tej samej granicy. A lokalnie jednostajna zbieżność implikuje zbieżność punktową do tej samej granicy.*

**Dowód:** Niech  $(f_n)_{n=1}^\infty$  będzie ciągiem funkcji określonych na  $A \subset \mathbb{C}$ , zbieżnym jednostajnie do funkcji  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Wtedy dla dowolnego punktu  $x \in A$  można wziąć  $U = A$  w definicji lokalnie jednostajnej zbieżności.

Niech teraz  $(f_n)_{n=1}^\infty$  będzie zbieżny lokalnie jednostajnie do  $f$  i ustalmy dowolny  $x \in A$ . Z definicji istnieje zatem otoczenie  $U$  punktu  $x$  w  $A$  takie, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N \forall t \in U : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

Ponieważ  $x \in U$ , więc w szczególności

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

■

**Przykład 8.1.6** *Ciąg  $(f_n)_{n=1}^\infty$  z Przykładu 8.1.2 jest lokalnie jednostajnie zbieżny do funkcji stale równej 0, ale nie jest jednostajnie zbieżny.*

**Dowód:** Niech  $z \in \mathbb{C}$  i niech  $U := K(0, |z| + 1)$ . Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z Zasady Archimedesza (Twierdzenie 1.4.4) istnieje liczba naturalna  $N > (|z| + 1)/\varepsilon$ . Jeśli teraz  $n \geq N$  i  $w \in U$ , to

$$|f_n(w) - 0| = \frac{|w|}{n} \leq \frac{|z| + 1}{N} < \varepsilon.$$

Z dowolności  $\varepsilon$  pokazaliśmy, że  $f_n|_U \rightrightarrows f|_U$ , gdzie  $f \equiv 0$ .

Z kolei wobec Własności 8.1.5 gdyby ten ciąg był jednostajnie zbieżny do jakiejś funkcji, to musiałaby to być funkcja  $f \equiv 0$ . Ale mamy

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n := n \in \mathbb{C} : |f_n(x_n) - 0| = \frac{n}{n} = 1,$$

zatem nie ma jednostajnej zbieżności. ■

**Własność 8.1.7** *Jeśli  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$  oraz  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , to*

$$f_n \rightrightarrows f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

**Dowód:**

$$\begin{aligned} f_n \rightrightarrows f &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N : \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0. \end{aligned}$$

■

W szczególności w  $\mathcal{B}(A, \mathbb{C})$  z metryką Czebyszewa zbieżność jednostajna jest równoważna zbieżności względem metryki Czebyszewa.

### Definicja 8.1.8 (Warunek Cauchy'ego)

Niech  $A \subset \mathbb{C}$  oraz  $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Mówimy, że ciąg  $(f_n)_{n=1}^\infty$  spełnia *warunek Cauchy'ego*, jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

**Twierdzenie 8.1.9 (Warunek Cauchy'ego a jednostajna zbieżność)** Jeśli  $A \subset \mathbb{C}$  oraz  $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ , to ciąg  $(f_n)_{n=1}^\infty$  spełnia warunek Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , że  $f_n \rightrightarrows f$ .

**Dowód:** ( $\Rightarrow$ ) Ustalmy dowolne  $x \in A$ . Z warunku Cauchy'ego wynika, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

to znaczy ciąg liczbowy  $(f_n(x))_{n=1}^\infty$  jest ciągiem Cauchy'ego. Na mocy Twierdzenia 3.6.5 o zespolonych ciągach Cauchy'ego jest on zbieżny. Niech

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Zdefiniowaliśmy funkcję  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Chcemy pokazać, że  $f_n \rightrightarrows f$ .

Ustalmy teraz dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z warunku Cauchy'ego

$$\exists N' \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N' \forall x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

przechodząc z  $m \rightarrow \infty$  otrzymamy dla  $n \geq N'$  oraz  $x \in A$  z ciągłości modułu (Przykład 7.2.3) i Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

( $\Leftarrow$ ) Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Z definicji jednostajnej zbieżności

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall n \geq N \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem dla  $m, n \geq N$  i  $x \in A$  mamy z nierówności trójkąta dla modułu

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

## 8.2 Ciągłość i różniczkowalność funkcji granicznych

**Twierdzenie 8.2.1 (Jednostajnie zbieżny ciąg funkcji ciągłych)** *Niech  $A \subset \mathbb{C}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  oraz niech  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$  będzie ciągła dla każdego  $n \in \mathbb{N}^*$ . Jeśli ciąg  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest lokalnie jednostajnie zbieżny do  $f$ , to  $f$  jest też ciągła. W szczególności jeśli  $f_n \Rightarrow f$ , to  $f$  jest też ciągła.*

**Dowód:** Ustalmy dowolne  $a \in A$  oraz takie jego otoczenie  $U$  w  $A$ , że  $f_n|_U \Rightarrow f|_U$ . Chcemy pokazać, że  $f$  jest ciągła w  $a$ . Wobec lokalności ciągłości (Własność 5.4.9) wystarczy pokazać, że  $f|_U$  jest ciągła w  $a$ .

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Ze zbieżności jednostajnej na  $U$  wynika, że

$$\exists N \in \mathbb{N}^* \forall x \in U : |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Z definicji Cauchy'ego ciągłości funkcji  $f_N$  w punkcie  $a$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - a| < \delta \implies |f_N(x) - f_N(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zatem jeśli  $x \in U$  i  $|x - a| < \delta$ , to z nierówności trójkąta dla modułu

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ostatnia teza wynika z tego co powyżej i Własności 8.1.5. ■

**Przykład 8.2.2** *Ciąg  $(f_n)_{n=1}^\infty$  z Przykładu 8.1.3 nie jest lokalnie jednostajnie zbieżny, choć jest punktowo zbieżny.*

**Dowód:** Wobec Własności 8.1.5 gdyby ten ciąg był zbieżny lokalnie jednostajnie, to do funkcji  $f$  z Przykładu 8.1.3, a to jest funkcja nieciągła, podczas gdy wyrazy tego ciągu są funkcjami ciągłymi. Sprzeczność z Twierdzeniem 8.2.1. ■

### Twierdzenie 8.2.3 (Diniiego) <sup>31</sup>

*Niech  $A \subset \mathbb{C}$  będzie zwarty,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła oraz niech  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie ciągła dla każdego  $n \in \mathbb{N}^*$ . Jeśli  $f_n \rightarrow f$  i  $\forall x \in A \forall n \in \mathbb{N}^* : f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ , to  $f_n \Rightarrow f$ .*

**Dowód:** Zauważmy najpierw, że indukcyjnie pokazujemy

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall m \geq n \forall x \in A : f_m(x) \leq f_n(x),$$

---

<sup>31</sup>Ulisse Dini (1845-1918) - matematyk włoski

a stąd przechodząc do granicy przy  $m \rightarrow \infty$  otrzymujemy  $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall x \in A : f(x) \leq f_n(x)$  z Twierdzenia 3.3.1 o zachowaniu nierówności słabej.

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$  i niech dla  $n \in \mathbb{N}^*$

$$K_n := \{x \in A : f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon\} = (f_n - f)^{-1}([\varepsilon, +\infty)).$$

Z ciągłości funkcji  $f_n$  i  $f$  zbiór  $K_n$  jest zbiorem zwartym, bo jest domknięty (por. Kryterium ciągłości 5.6.4) i ograniczony jako zawarty w zwartym  $A$  (zob. Twierdzenie 4.4.3 o zwartości w  $\mathbb{R}$ ). Ponadto  $\forall n \in \mathbb{N}^* : K_{n+1} \subset K_n$  z monotoniczności ciągu  $(f_n)_{n=1}^\infty$ .

Założmy teraz dla dowodu nie wprost, że  $\forall n \in \mathbb{N}^* : K_n \neq \emptyset$ . Wtedy na mocy Własności 4.4.4 istnieje punkt

$$a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} K_n.$$

To oznacza, że

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : |f_n(a) - f(a)| = f_n(a) - f(a) \geq \varepsilon,$$

a to jest sprzeczne ze zbieżnością  $f_n(a) \rightarrow f(a)$ . Zatem musi istnieć takie  $N \in \mathbb{N}^*$ , że  $K_N = \emptyset$ . Ale wobec zstępowania  $\forall n \geq N : K_n = \emptyset$ . A to oznacza, że

$$\forall n \geq N \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) - f(x) < \varepsilon,$$

ponieważ  $x \notin K_n$ . ■

Pokażemy, że wszystkie założenia w Twierdzeniu Diniego są konieczne.

**Przykład 8.2.4** 1. Jeśli  $f_n : [0, 1] \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ , to  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest malejący i zbieżny punktowo do funkcji stale równej 0, ale nie jest zbieżny jednostajnie.

2. Jeśli  $g_n : [0, 1] \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ , to  $(g_n)_{n=1}^\infty$  jest malejący i punktowo zbieżny do funkcji nieciągłej, nie jest zbieżny jednostajnie.

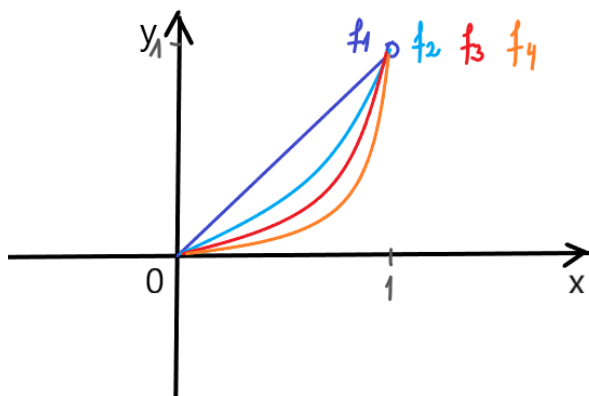
3. Niech  $[0, 1] \cap \mathbb{Q} := \{q_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ . Jeśli  $h_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jest dana wzorem

$$h_n(x) := \begin{cases} 0, & x \in ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{q_1, \dots, q_n\} \\ 1, & x \in \{q_j : j \geq n+1\} \end{cases},$$

to  $(h_n)_{n=1}^\infty$  jest malejący i zbieżny punktowo do 0, ale nie jest zbieżny jednostajnie.

4. Jeśli  $k_n : [0, 1] \ni x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2} \in \mathbb{R}$ , to  $(k_n)_{n=1}^\infty$  nie jest malejący, jest punktowo zbieżny do funkcji stale równej 0, ale nie jest jednostajnie zbieżny.

**Dowód:**



1. Funkcja graniczna to  $f \equiv 0$  (zob. Przykład 8.1.3). Ponieważ  $\sup_{x \in [0,1)} x^n = 1$ , zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1)} |f_n(x) - f(x)| = 1 \neq 0.$$

Stosujemy Własność 8.1.7.

2. Przykład 8.2.2.

3. Funkcja graniczna to  $f \equiv 0$ . Mamy  $\sup_{x \in [0,1]} h_n(x) = h_n(q_{n+1}) = 1$  i postępujemy jak w punkcie 1.

4. Funkcja graniczna to  $f \equiv 0$ . Mamy

$$k_{n+1} \left( \frac{1}{n} \right) = k_n \left( \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n^2 + n}{2n^2 + 2n + 1} < \frac{1}{2} = k_{n+1} \left( \frac{1}{n+1} \right) = k_n \left( \frac{1}{n} \right),$$

a stąd  $\sup_{x \in [0,1]} k_n(x) \geq \frac{1}{2}$  i jak w punkcie 1. ■

Informacyjnie (bez dowodu w tym ogólnym przypadku):

**Twierdzenie 8.2.5** Niech  $A \subset \mathbb{K}$  oraz  $\forall n \in \mathbb{N}^* : f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Wtedy  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest lokalnie jednostajnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru zwartego  $K \subset A$  ciąg  $(f_n|_K)_{n=1}^\infty$  jest jednostajnie zbieżny.

Wykażemy szczególny przypadek powyższego twierdzenia.

**Własność 8.2.6** Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest przedziałem,  $a \in A$  i  $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$  dla  $n \in \mathbb{N}^*$ , to następujące warunki są równoważne:

- $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest zbieżny lokalnie jednostajnie;
- $\forall [\alpha, \beta] \subset A : a \in [\alpha, \beta] \implies (f_n|_{[\alpha, \beta]})_{n=1}^\infty$  jest zbieżny jednostajnie.

**Dowód:**( $\Downarrow$ ) Niech  $f$  będzie funkcją graniczną ciągu  $(f_n)_{n=1}^\infty$ . Ustalmy dowolny taki przedział  $[\alpha, \beta] \subset A$ , że  $a \in [\alpha, \beta]$ . Chcemy pokazać, że  $f_n|_{[\alpha, \beta]} \Rightarrow f|_{[\alpha, \beta]}$ .

Ponieważ zbieżność ciągu  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest lokalnie jednostajna, więc dla dowolnego  $x \in [\alpha, \beta]$  istnieje takie jego otoczenie  $U_x$  w  $\mathbb{R}$ , że  $f_n|_{U_x \cap A} \Rightarrow f|_{U_x \cap A}$ . Ponieważ  $[\alpha, \beta]$  jest zwarty na mocy Twierdzenia 4.4.3 o zbiorach zwartych w  $\mathbb{K}$ , więc na mocy Twierdzenia 4.4.8

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{j=1}^k U_{x_j}.$$

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ . Dla dowolnego  $j \in \{1, \dots, k\}$  dobieramy  $N_j$  do tego  $\varepsilon$  z definicji zbieżności jednostajnej na  $U_{x_j} \cap A$ . Jeśli teraz  $N = \max_{j \in \{1, \dots, k\}} N_j$ , to

$$\forall n \geq N \forall x \in [\alpha, \beta] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

( $\Uparrow$ ) Dla dowolnego  $x \in A$  szukamy takiego otoczenia  $U_x \subset A$ , że  $(f_n|_{U_x})_{n=1}^\infty$  jest jednostajnie zbieżny.

Niech najpierw  $x = a$ . Jeśli  $a$  jest punktem wewnętrznym, to istnieje takie  $r > 0$ , że  $(a - 2r, a + 2r) \subset A$  z otwartości wnętrza, mamy zbieżność jednostajną na  $[a - r, a + r]$ , więc w szczególności także na otoczeniu  $(a - r, a + r)$ . Jeśli  $a$  jest prawym końcem przedziału  $A$ , to istnieje takie  $r > 0$ , że  $a - r \in A$ , mamy zbieżność jednostajną na  $[a - r, a]$ , więc także na otoczeniu  $(a - r, a] = (a - r, a + r) \cap A$ . Symetrycznie, jeśli jest to lewy koniec przedziału.

Niech teraz  $x \in A$  będzie takie, że  $x < a$ . Jeśli  $x$  nie jest lewym końcem przedziału, to istnieje  $r > 0$ , takie, że  $x - r \in A$ . Wtedy mamy zbieżność jednostajną na  $[x - r, a]$ , zatem także na otoczeniu  $(x - r, a)$ . Jeśli  $x$  jest lewym końcem przedziału przedziału  $A$ , to mamy zbieżność jednostajną na  $[x, a]$ , zatem także na otoczeniu  $[x, a) = (x - 1, a) \cap A$ .

Przypadek  $x > a$  jest symetryczny. ■

Informacyjnie (bez dowodu w tym ogólnym przypadku):

**Twierdzenie 8.2.7** *Niech  $A \subset \mathbb{K}$  będzie otwarty i spójny, niech  $f_n : A \rightarrow \mathbb{K}$  będzie różniczkowalna dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}^*$  oraz niech  $(f'_n)_{n=1}^\infty$  będzie lokalnie jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji  $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ . Jeśli istnieje takie  $a \in A$ , że  $(f_n(a))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny, to istnieje funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  różniczkowalna i taka, że  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest lokalnie jednostajnie zbieżny do  $f$  oraz  $f' = g$ .*

Wykażemy to twierdzenie w przypadku rzeczywistym.

**Twierdzenie 8.2.8 (O różniczkowaniu ciągów funkcyjnych)** *Niech  $A \subset \mathbb{R}$  będzie przedziałem otwartym,  $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}^*$*

oraz niech  $(f'_n)_{n=1}^\infty$  będzie lokalnie jednostajnie zbieżny do pewnej funkcji  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Jeśli istnieje takie  $a \in A$ , że  $(f_n(a))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny, to istnieje funkcja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  różniczkowalna i taka, że  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest lokalnie jednostajnie zbieżny do  $f$  oraz  $f' = g$ .

### Dowód:

**Krok I:** Pokażemy najpierw, że  $(f_n)_{n=1}^\infty$  jest lokalnie jednostajnie zbieżny. Wobec Własności 8.2.6 wystarczy pokazać jednostajną zbieżność na dowolnym niezdegenerowanym przedziale  $[\alpha, \beta] \subset A$ , do którego należy punkt  $a$ . Ustalmy taki dowolny przedział i niech  $R := \beta - \alpha$ , stąd  $R > 0$ , bo przedział nie jest punktem.

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ .

Ciąg  $(f'_n)_{n=1}^\infty$  jest lokalnie jednostajnie zbieżny, więc na mocy Własności 8.2.6 ciąg  $(f'_n|_{[\alpha, \beta]})_{n=1}^\infty$  jest jednostajnie zbieżny. Spełniony jest zatem warunek Cauchy'ego (zob. Twierdzenie 8.1.9 o warunku Cauchy'ego dla ciągów funkcyjnych), czyli

$$(8.1) \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N_1 \forall \zeta \in [\alpha, \beta] : \quad |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{2R}.$$

Ciąg  $(f_n(a))_{n=1}^\infty$  jest zbieżny, zatem jest ciągiem Cauchy'ego (Twierdzenie 3.6.5 o zespolonych ciągach Cauchy'ego), to znaczy

$$(8.2) \quad \exists N_2 \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N_2 : \quad |f_n(a) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech  $N = N_1 + N_2$ .

Ustalmy dowolne  $x \in [\alpha, \beta] \setminus \{a\}$  oraz  $n, m \geq N$ . Wtedy z Twierdzenia 6.2.6 Lagrange'a zastosowanego do funkcji  $f_n - f_m$

$$\exists \zeta \in [\alpha, \beta] : \quad f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta) = (f_n - f_m)'(\zeta) = \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))}{x - a},$$

a stąd

$$(8.3) \quad \exists \zeta \in [\alpha, \beta] : \quad |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| \leq |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| \cdot R.$$

Mamy zatem z nierówności trójkąta dla modułu i wobec (8.3), (8.2) i (8.1)

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a)) + f_n(a) - f_m(a)| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| + |f_n(a) - f_m(a)| < \\ &< |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| \cdot R + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że

$$\forall n, m \geq N \forall x \in [\alpha, \beta] : \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

to znaczy warunek Cauchy'ego, a stąd wynika wobec Twierdzenia 8.1.9, że  $(f_n|_{[\alpha, \beta]})_{n=1}^\infty$  jest zbieżny jednostajnie.

W szczególności otrzymaliśmy graniczną funkcję  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

Krok II: Ustalmy dowolne  $b \in A$ . Ponieważ  $A$  jest otwarty,  $b$  jest punktem skupienia zbioru  $A$ . Definiujemy

$$h_n : A \ni x \mapsto h_n(x) := \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(b)}{x - b} & \text{dla } x \in A \setminus \{b\} \\ f'_n(b) & \text{dla } x = b \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

$h_n$  jest funkcją ciągłą – jako iloraz ciągłych poza punktem  $b$  i z definicji pochodnej w punkcie  $b$  (oraz z Twierdzenia 5.3.5 o zależności między granicą a ciągłością).

Ustalmy dowolne  $\varepsilon > 0$ .

Ustalmy dowolny przedział  $[\alpha, \beta] \subset A$ , do którego należy  $b$ . Wobec Własności 8.2.6 ciąg  $(f'_n|_{[\alpha, \beta]})_{n=1}^\infty$  jest jednostajnie zbieżny, zatem spełniony jest warunek Cauchy'ego, czyli

$$(8.4) \quad \exists N_3 \in \mathbb{N}^* \forall n, m \geq N_3 \forall \zeta \in [\alpha, \beta] : |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| < \varepsilon.$$

W szczególności zachodzi to także dla  $\zeta = b$ .

Ustalmy dowolne  $x \in [\alpha, \beta] \setminus \{b\}$  oraz  $n, m \geq N_3$ . Stosujemy Twierdzenie 6.2.6 Lagrange'a do funkcji  $f_n - f_m$ :

$$\exists \zeta \in [\alpha, \beta] : f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta) = \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(b) - f_m(b))}{x - b}.$$

Wobec tego i (8.4)

$$|h_n(x) - h_m(x)| = \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(b) - f_m(b))}{x - b} \right| = |f'_n(\zeta) - f'_m(\zeta)| < \varepsilon.$$

Oczywiście wprost z (8.4)

$$|h_n(b) - h_m(b)| = |f'_n(b) - f'_m(b)| < \varepsilon.$$

Pokazaliśmy, że  $(h_n|_{[\alpha, \beta]})_{n=1}^\infty$  spełnia warunek Cauchy'ego. Czyli  $(h_n)_{n=1}^\infty$  jest lokalnie jednostajnie zbieżny (wykorzystujemy znowu Twierdzenie 8.1.9 i Własność 8.2.6) do funkcji

$$h : A \ni x \mapsto h(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} & \text{dla } x \in A \setminus \{b\} \\ g(b) & \text{dla } x = b \end{cases}.$$

Wobec Twierdzenia 8.2.1 o jednostajnie zbieżnym ciągu funkcji ciągłych funkcja  $h$  musi być ciągła, więc na mocy Twierdzenia o związku granicy i ciągłości

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = g(b),$$

a to oznacza z definicji  $f'(b) = g(b)$ . ■

Założenie o lokalnie jednostajnej zbieżności pochodnych jest konieczne. Także konieczne jest założenie o zbieżności w punkcie  $a$ .

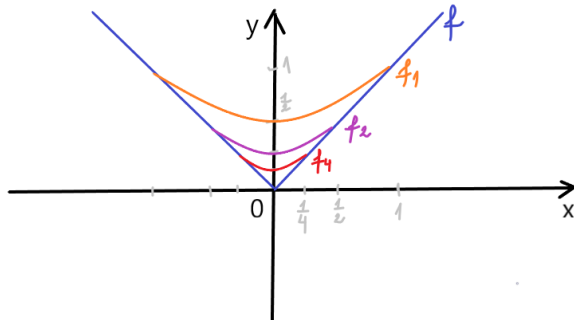
**Przykład 8.2.9** ( $\iota$ ) Ciąg  $(f_n)_{n=1}^\infty$ , gdzie

$$f_n(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & \text{dla } x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

jest jednostajnie zbieżny do funkcji  $|\cdot|$ .

( $\iota$ ) Ciąg funkcji stałych  $(g_n)_{n=1}^\infty$ , gdzie  $g_n \equiv n$ , nie jest ani jednostajnie, ani lokalnie jednostajnie, ani nawet punktowo zbieżny.

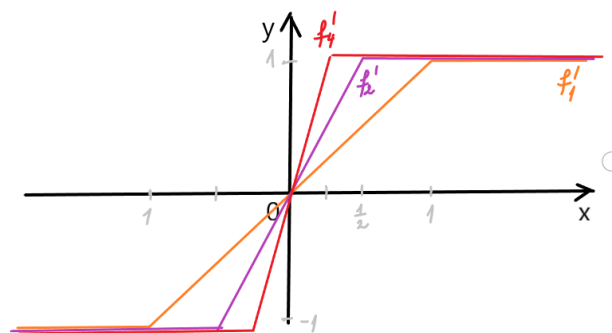
**Dowód:** ( $\iota$ )



Ustalmy dowolne  $n \in \mathbb{N}^*$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - |x|| &= \sup_{x \in [0, 1/n)} \left| \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} - x \right| = \sup_{x \in [0, 1/n)} \left| \frac{n}{2} \left( x - \frac{1}{n} \right)^2 \right| = \\ &= \frac{n}{2} \left( 0 - \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Zatem przy  $n \rightarrow \infty$  to supremum dąży do 0, co oznacza zbieżność jednostajną na mocy Własności 8.1.7. Funkcja moduł nie ma pochodnej w 0, zatem któreś założenie nie może być spełnione.



Mamy

$$f'_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ nx & \text{dla } x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

Punktowo ciąg pochodnych jest zbieżny do funkcji signum. Stąd wynika, że nie jest on zbieżny lokalnie jednostajnie, bo wtedy granica byłaby funkcją ciągłą na mocy Twierdzenia 8.2.1 o jednostajnie zbieżnym ciągu funkcji ciągłych ( $f'_n$  są ciągłe).

( $\iota$ ) Pochodna funkcji stale równej  $n$  jest stale równa 0, zatem ciąg pochodnych jest jednostajnie zbieżny do funkcji stale równej zero. Ale ciąg funkcji stale równych  $n$  nie jest nawet punktowo zbieżny. Nie jest on w szczególności zbieżny w żadnym punkcie  $\mathbb{R}$ . ■